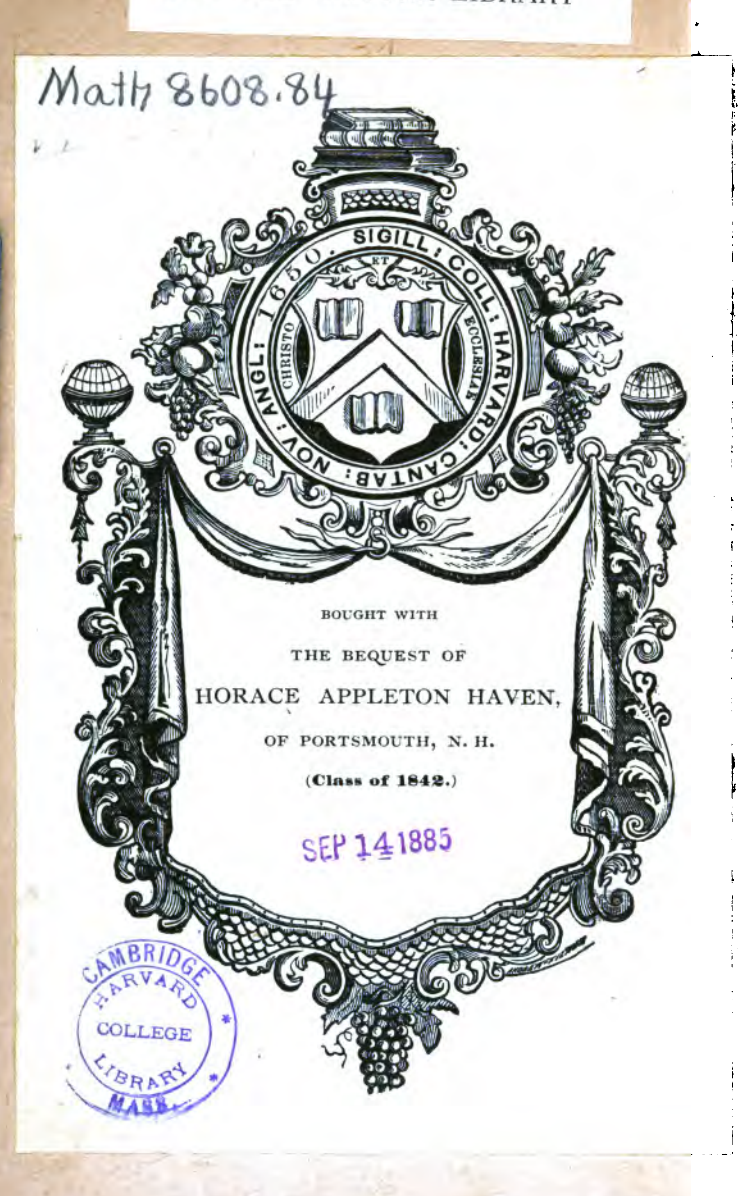

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY.


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

Analytische

Geometrie der Kegelschnitte

nach elementarer Methode

für höhere Schulen

von

W. Fuhrmann,
Oberlehrer am Realgymnasium auf der Burg in Königsberg i. Pr

Mit 27 Figuren im Text und 2 Tafeln.

Berlin 1884.
Winckelmann & Söhne.

Vorwort.

Von allen Zweigen der Mathematik, die auf der Schule gelehrt werden, regt keiner die Schüler, besonders die bessern, so an, als die analytische Geometrie, sie ist aber auch vorzugsweise geeignet, die verschiedenen Teile in innern Zusammenhang zu setzen. Es ist daher natürlich, dafs sie viele Bearbeiter gefunden hat, zumal solche, welche sich bemühten, diesen Zweig des Wissens weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Zu diesen gehören hervorragende Männer der Wissenschaft, so dafs es als ein Wagnis erscheinen mufs, ein Werk darüber noch erscheinen zu lassen. Man wird indessen einen Unterschied zwischen den Werken, die dem Fortschritt, und denen, die der Verbreitung dienen sollen, zugestehen. Je einfacher bei den letztern der Weg ist, desto besser ist er, vorausgesetzt, dafs das Resultat nicht beeinträchtigt ist. In dieser Hinsicht sei bemerkt, dafs im vorliegenden Werke stets ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt ist, wenn es dasselbe leistete, als ein schiefwinkliges. Gelegentlich wurde ein Resultat durch synthetische Schlüsse gewonnen, wodurch es möglich war, die hauptsächlichsten elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte zu entwickeln, ohne den Umfang des Buches sehr grofs zu machen. Aufserdem erhielten die Schüler dadurch eine Anleitung, analytisch gewonnene Eigenschaften synthetisch zu verwerten. Man wird ferner das Streben bemerken, erst die speziellen Eigenschaften abzuleiten, und dann die allgemeinern, wobei auf den Zusammenhang der früheren mit diesen aufmerksam gemacht wurde; doch bedarf dieses kaum der Erwähnung, da pädagogische Rücksichten dies schon fordern. Diese Rücksichten bewogen mich auch, einige Darstellungen in Determinantenform zu bringen. Diese Formen prägen sich einerseits dem Schüler leicht ein, andererseits lernt

er diese Formen, die sich durch Eleganz auszuzeichnen pflegen, kennen, es wird damit der Sinn für gewisse algebraische Formen geweckt, die für spätere Entwicklungen wichtig sind.

Dann mufs ich noch bemerken, dafs ich hier dieselbe Winkelbezeichnung festgehalten habe, wie in meiner „Einleitung in die neuere Geometrie". Ein Winkel ist nach meiner Auffassung das durch 2 Gerade bestimmte Gebilde. Wenn der Winkel daher nicht als einfache Gröfse aufgefafst wird, so mufs bei seiner Bezeichnung hervortreten, dafs er ein durch 2 Elemente bestimmtes Gebilde ist. Es wird daher der Winkel zwischen 2 Geraden a und b konsequenter Weise durch $(a\ b)$ bezeichnet. Ein Büschel von 4 Geraden mit dem Centrum O, welche durch die Punkte $A\,B\,C\,D$ gehen, bezeichnet man mit $O\ (A\ B\ C\ D)$, hienach scheint es mir richtig, einen Winkel mit dem Scheitel O, dessen Schenkel durch A und B gehen, mit $O\ (A\,B)$ zu bezeichnen.

Dieses Werk macht nur den Anspruch, die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten, daher ist es wohl unnötig, den Quellennachweis hinzuzufügen, da alle Werke darüber das meiste enthalten. Indessen darf ich doch nicht unerwähnt lassen, dafs ich vorzugsweise aus „Salmon: analytische Geometrie der Kegelschnitte, übersetzt von Fiedler", und aus „Joachimsthal: Elemente der analytischen Geometrie der Ebene" geschöpft habe. Dafs ich noch andere Quellen benutzt habe, ist selbstverständlich, und habe ich einige Sätze, die ich nur in Zeitschriften, besonders in den „nouvelles annales de mathématique" gefunden habe, für wichtig genug gehalten, um in vorliegendes Lehrbuch aufgenommen zu werden. Es war mir dabei der Gedanke mafsgebend, dafs der Schüler durch den Unterricht in den Stand gesetzt werden mufs, Aufgaben über Kegelschnitte lösen zu lernen, wie sie in Aufgabensammlungen jetzt enthalten sind.

In erster Linie ist vorliegendes Lehrbuch für meine Schüler bestimmt, damit ihnen die Ausarbeitung des vorgetragenen Stoffes erspart bleibt, indessen hofft, dafs auch andere sich mit diesem Lehrgange einverstanden erklären werden,

der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitende Bemerkungen.

In der alten Methode zur Beweisführung von Sätzen und zur Lösung geometrischer Probleme bezog man die Punkte und Linien auf eine ursprünglich gegebene Figur; in einer neuen, deren Erfinder Descartes (1596—1650) ist, bezieht man die Gebilde auf ein System von Linien, welche der eigentlichen Figur gar nicht angehören. Alle Linien, gerade oder krumme, werden durch Gleichungen dargestellt. Durch Umformung der Gleichungen und Kombination solcher gelangt man dann zur Auffindung geometrischer Wahrheiten. Die beiden Methoden unterschied man nun als synthetische und analytische.

Der Gedanke des Descartes wurde allmählich weiter ausgeführt; zunächst durch Parent, welcher die Methode auf die räumliche Geometrie ausdehnte, dann durch Clairault. In diesem Jahrhundert haben sich um die Ausbildung dieser Methode besonders verdient gemacht: Möbius, Plücker, Hesse, Clebsch, Salmon; doch setzen die Methoden dieser Männer für eine elementare Behandlung oft zu viel voraus, daher zur ersten Einführung in die Theorie die Methode nach Descartes die angemessenste ist, welche wir daher hier befolgen. An einigen Stellen werden indessen hier auch neuere Methoden zur Anwendung kommen.

I. Kapitel.

Begriff des Koordinatensystems und der Punkt.

1. Nimmt man auf einer unbegrenzten Geraden einen Punkt O an, welcher Anfangspunkt genannt werde, so wird die Lage irgend eines andern Punktes der Geraden durch seine Entfernung von diesem Punkte bestimmt, falls angegeben wird, ob der

Punkt in dem einen oder andern Gebiete liegt, deren Grenzpunkt O ist. Diese Gebiete können dadurch unterschieden werden, daſs man der Gröſse, welche die Entfernung angiebt, noch ein Zeichen beilegt, so daſs man eine positive und eine negative Entfernung annimmt. Um einen Punkt auf diese Art durch eine Zahl festzustellen, ist natürlich nötig, eine bestimmte Länge als Einheit festzusetzen. — Wir nennen die mit einem Zeichen versehene Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte seine Abscisse, so daſs der Anfangspunkt selbst die Abscisse o hat.

2. Man habe mehrere Punkte auf einer Geraden: $A\, A_1\, A_2 \dots$, deren Abscissen resp. seien $x\, x_1\, x_2 \dots$, so daſs $OA = x$, $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2 \dots$.

Denkt man sich A als einen neuen Anfangspunkt, und bezeichnet die Abscissen von $A_1\, A_2 \dots O$ in Bezug hierauf mit $\xi_1\, \xi_2 \dots \omega$, so ergiebt sich leicht

$$AA_1 = \xi_1 = x_1 - x,\quad AA_2 = \xi_2 = x_2 - x_1 \dots AO = \omega = -x.$$

Man erhält also die neuen Abscissen, indem man von den alten die Abscisse des neuen Anfangspunktes in Bezug auf den alten abzieht. Der alte Anfangspunkt hat in Bezug auf den neuen das entgegengesetzte Zeichen von der Abscisse des neuen Anfangspunktes in Bezug auf den alten.

Es ist eben $AO = -x$, wenn $OA = x$.

Daſs es dabei gleichgültig ist, ob der neue Anfangspunkt im positiven oder negativen Gebiet liegt, ist selbstverständlich.

3. Die Lage eines Punktes auf einer Geraden kann man auch durch das Verhältnis der Entfernungen von 2 festen Punkten bestimmen, und diese Bestimmung ist von Wichtigkeit. Die Abscissen von 2 Punkten A_1 und A_2 seien x_1 und x_2 (Fig. 1), die eines Punktes B_1 aber x_3. Ist nun

Fig. 1.

A_1 B_1 A_2 B_2

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = k$$

wo k offenbar positiv ist, wenn B_1 innerhalb der Strecke $A_1 A_2$ liegt, negativ dagegen, wenn B_1 auſserhalb liegt, so ergiebt sich daraus

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

Die analoge Gleichung wird auch für ein negatives k gelten. Ist dann das Verhältnis $-k$, so wird die Abscisse des dadurch bestimmten Punktes B_2

$$x_4 = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}.$$

Wir sagen nun, dafs die Punkte B_1 und B_2 die Strecke $A_1 A_2$ harmonisch teilen, und die Punkte $A_1 A_2 B_1 B_2$ bezeichnet man als harmonische. Wir sehen hienach, 4 Punkte werden harmonisch sein, wenn sie auf einer Geraden liegen, die wir uns als Abscisse denken und ihre Abscissen sich folgendermafsen darstellen:

$$x_1,\ x_2,\ \frac{x_1 + kx_2}{1 + k},\ \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}.$$

Setzt man übrigens

$$\frac{x_1 + k\,x_2}{1 + k} = y_1 \text{ und } \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} = y_2$$

so folgt daraus:

$$x_1 = \frac{y_1 + \frac{1-k}{1+k}\,y_2}{1 + \frac{1-k}{1+k}},\quad x_2 = \frac{y_1 - \frac{1-k}{1+k}\,y_2}{1 - \frac{1-k}{1+k}}$$

und hieraus, dafs auch umgekehrt die Punkte A_1 und A_2 die Strecke $B_1 B_2$ harmonisch teilen.

Für $k = 1$ stellt der eine Punkt etwa B_1 den Mittelpunkt der Strecke $A_1 A_2$ dar, es ergiebt sich:

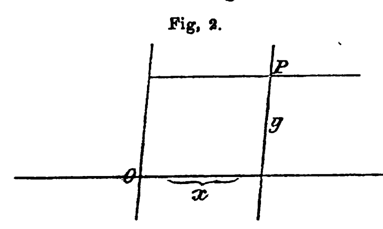
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

für den harmonisch konjugierten dagegen ergiebt sich $x_{m'} = \frac{x_1 - x_2}{0}$ d. h. ∞, also der harmonisch konjugierte des Mittelpunktes liegt in der Unendlichkeit, was mit der Anschauung auch in Übereinstimmung gebracht werden kann.

4. Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, nimmt man 2 Gerade als gegeben an, die man als Koordinatenaxen bezeichnet, und zwar nennt man die eine die Abscissen- oder x-Axe, die andere die Ordinaten- oder y-Axe. Jede dieser Geraden wird durch die andere in 2 Gebiete zer-

legt, von denen man das eine als das positive, das andere als das negative ansieht, während der Schnittpunkt Anfangspunkt heifst. Man pflegt dabei zur x-Axe die mehr horizontal verlaufende zu wählen, und die Richtung nach rechts und bei der y-Axe die mehr nach oben gehende Richtung als positiv anzunehmen. Zieht man nun durch irgend einen Punkt P Parallele zu den Axen (Fig. 2), so werden von denselben durch P und die Axen Stücke abgeschnitten; das Stück von P bis zur y-Axe wird als x-Koordinate oder Abscisse, das Stück von P bis zur x-Axe als y-Koordinate oder Ordinate bezeichnet. Es ist klar, dafs durch diese Koordinaten jeder Punkt der Ebene eindeutig bestimmt wird, wenn ebenso wie bei einer Abscisse allein die Zeichenbestimmung gewählt wird. Übrigens darf man, um die Koordinaten eines Punktes zu bestimmen, nur eine Parallele zu den Axen ziehen, da die resp. 2te Koordinate durch die Entfernung des Schnittpunktes der Parallelen und der Axe vom Anfangspunkte bestimmt wird. Entsprechend dem Umstande, dafs ein Punkt der Ebene durch 2 Bedingungen bestimmt wird, sieht man, dafs dies jetzt durch 2 Koordinaten geschieht.

Fig. 2.



In den meisten Fällen wählt man der Einfachheit der Rechnung halber ein rechtwinkliges Koordinatensystem, doch giebt es auch Fälle, in denen schiefwinklige Koordinaten mit Vorteil angewandt werden.

5. Die Lage eines Punktes in der Ebene kann noch durch andere Elemente bestimmt werden, welche man ebenfalls als Koordinaten des Punktes bezeichnet. Um die vorher angegebenen Koordinaten näher zu bezeichnen, nennt man sie Parallelkoordinaten. Es soll hier noch die Bestimmung eines Punktes durch Polarkoordinaten angegeben werden. Man geht bei diesen von einer Geraden mit einem Anfangspunkte aus, der Anfangspunkt heifst Pol, die Gerade aber Axe. Die Lage eines Punktes wird dann durch die Entfernung vom Anfangspunkte und den Winkel bestimmt, welchen die Verbindungsgerade des betreffenden Punktes und des Anfangspunktes mit der Axe bildet; die Entfernung wird im allgemeinen als positiv betrachtet, während der Winkel jede Gröfse annehmen kann. Denken wir uns den Pol als den Anfangspunkt eines recht-

winkligen Axensystems, so hängen die Polarkoordinaten r und φ mit den rechtwinkligen durch folgende Gleichungen zusammen:

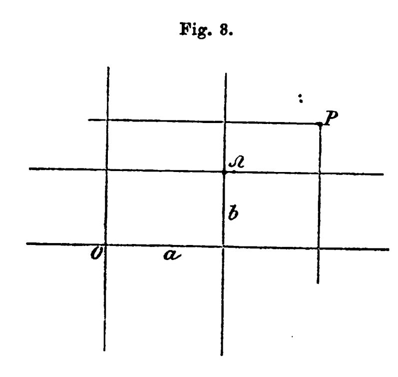
$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi,$$

oder also umgekehrt $tg\, \varphi = \frac{y}{x}$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

6. Koordinatentransformation. Stellt man die Koordinaten eines Punktes in Bezug auf ein System durch die eines anderen Systems dar, so bezeichnen wir dies als Koordinatentransformation; diese Aufgabe ist für die analytische Geometrie von fundamentaler Bedeutung. Es lassen sich nun alle Veränderungen eines Koordinatensystems auf 2 zurückführen, nämlich auf die Verschiebung des Anfangspunktes und die Drehung der Koordinaten um den Anfangspunkt, welche wir gesondert betrachten wollen. Zunächst wollen wir uns den Anfangspunkt verschoben denken; der ursprüngliche Anfangspunkt sei O, der neue Ω (Fig. 3); die Koordinaten eines Punktes P in Bezug auf das alte Axensystem mit O als Anfangspunkt seien x und y, dieselben in Bezug auf das neue aber ξ und η. Sind die Koordinaten von Ω in Bezug auf das erste Koordinatensystem a und b, so

Fig. 3.



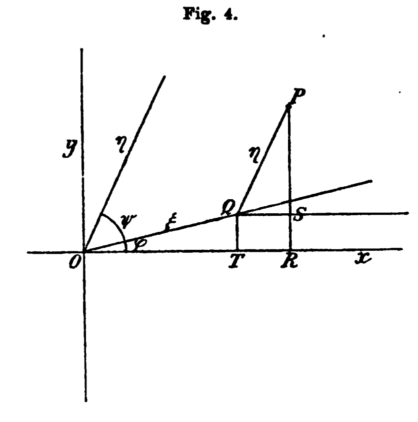
ergiebt sich sofort

$$1) \quad \begin{matrix} x = \xi + a \\ y = \eta + b \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} \xi = x - a \\ \eta = y - b. \end{matrix}$$

In betreff der Transformation des Koordinatensystems, welche durch Drehung der Axen bewirkt wird, ist es für unsere Zwecke nur wichtig, ein rechtwinkliges in ein schiefwinkliges, sowie umgekehrt ein schiefwinkliges in ein rechtwinkliges, ein rechtwinkliges in ein anderes rechtwinkliges zu verwandeln; die letzte Transformation ist aber offenbar nur ein spezieller Fall der ersten.

Der Anfangspunkt heiſse wieder O, für ein rechtwinkliges Koordinatensystem habe ein Punkt P die Koordinaten x und y, für das betreffende schiefwinklige ξ und η (Fig. 4); die neue Abscissenaxe der ξ bilde mit der alten x-Axe den Winkel φ, die neue Ordinatenaxe mit der x-Axe den Winkel ψ, so daſs $\psi - \varphi = \omega$ der neue Koordinatenwinkel ist. Fällen wir von P das Lot PR auf die x-Axe, so ist $PR = y$, $OR = x$. Ziehen wir PQ parallel zu η bis zur ξ-Axe, so ist $PQ = \eta$, $OQ = \xi$; wir fällen noch das Lot QT auf die x-Axe und das Lot QS auf PR, dann ergiebt sich sofort

Fig. 4.



$$2)\quad \begin{aligned} y &= PR = QT + PS = \xi \sin\varphi + \eta \sin\psi \\ x &= OR = OT + QS = \xi \cos\varphi + \eta \cos\psi \end{aligned}$$

womit diese Transformation vollzogen ist. Durch Auflösung dieser Gleichungen nach ξ und η ergiebt sich

$$3)\quad \xi = \frac{x \sin\psi - y \cos\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$$

$$\eta = \frac{-x \sin\varphi + y \cos\varphi}{\sin(\psi - \varphi)}$$

Ist endlich $\psi - \varphi = 1\,R$, so ergiebt sich für die Koordinatentransformation eines rechtwinkligen Systems in ein anderes eben solches

$$4)\quad \begin{aligned} \xi &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ \eta &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi. \end{aligned}$$

Aus der Kombination der beiden Transformationen ergiebt sich dann die allgemeine. Indem wir ein schiefwinkliges Koordinatensystem in ein rechtwinkliges, und dieses in ein anderes schiefwinkliges transformieren, erhalten wir auch die Transformation eines schiefwinkligen in ein anderes schiefwinkliges. Es sei im allgemeinen nur noch bemerkt, daſs sich die Transformation eines Koordinatensystems in ein anderes durch lineare Gleichungen vollzieht, also

$$\begin{aligned} x &= a_0 + b_0 \xi + c_0 \eta \\ y &= a_1 + b_1 \xi + c_1 \eta. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird immer ein rechtwinkliges Koordinatensystem vorausgesetzt. Der Anfangspunkt heifst stets O.

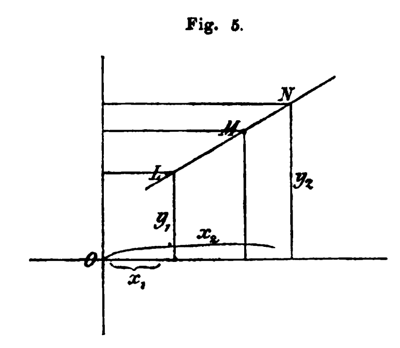


Fig. 5.

7. Die Koordinaten von 2 Punkten L und N (Fig. 5) seien $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$; die Koordinaten eines Punktes M auf der Verbindungslinie $x_3\,y_3$. Die Figur ergiebt mittelst ähnlicher Dreiecke sofort

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{LM}{MN}, \quad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = \frac{LM}{MN}.$$

Wird $\frac{LM}{MN} = k$ gesetzt, so folgt hieraus

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Wenn sich umgekehrt die Koordinaten eines Punktes durch die von 2 andern Punkten in dieser Weise ausdrücken lassen, so bedeutet dieses, dafs der betreffende Punkt auf der Verbindungslinie der beiden andern liegt, denn nur dann sind die Verhältnisse $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}$ und $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$ einander gleich. Man erhält dann sämtliche Punkte der Verbindungslinie LN, wenn man den Wert von k verändert; für Punkte auf der Verlängerung ist k offenbar negativ. Unterscheiden sich 2 Punkte auf dieser Geraden nur durch das Vorzeichen von k, so sind dieselben harmonisch konjugiert zu den ersten. Die Koordinaten von 4 harmonischen Punkten stellen sich also folgendermafsen dar:

$$x_1\,y_1;\; x_2\,y_2;\; \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}\;\frac{y_1 + ky_2}{1 + k};\; \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}\;\frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

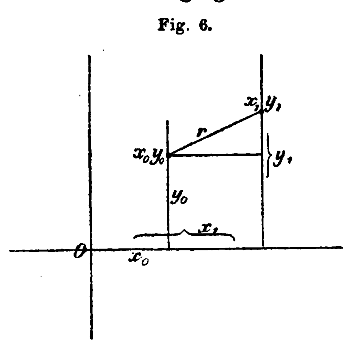
Setzen wir hier $k = 1$, so ergeben sich für die Koordinaten der beiden letzten Punkte

$$\frac{x_1 + x_2}{2},\; \frac{y_1 + y_2}{2};\; \frac{x_1 - x_2}{0} = \infty,\; \frac{y_1 - y_2}{0} = \infty.$$

Der erste ist dann der Mittelpunkt und der zum Mittelpunkt einer Strecke harmonisch konjugierte Punkt liegt in der Unendlichkeit.

8. Aufgabe. Die Entfernung von 2 Punkten, deren Koordinaten gegeben sind, zu bestimmen.

Fig. 6.



Nehmen wir zuerst ein rechtwinkliges Koordinatensystem an. Die Koordinaten der beiden Punkte seien (Fig. 6) $x_0\ y_0$ und $x_1\ y_1$. Ziehen wir durch die Punkte die Parallelen zu den Axen, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten resp. sind $\pm\ (x_1 - x_0)$ und $\pm\ (y_1 - y_0)$, je nachdem $x_1 \gtrless x_0$ und $y_1 \gtrless y_0$ ist.

Es ergiebt sich für den Abstand sofort:

$$r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2.$$

Ist das Axensystem ein schiefwinkliges mit ω als Koordinatenwinkel, so ergiebt ein analoges Dreieck

$$r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \cos \omega.$$

Der Abstand eines Punktes $x_1\ y_1$ vom Koordinaten-Anfangspunkte ist hienach resp.

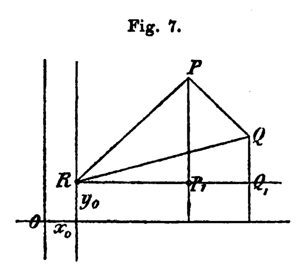
$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 \text{ oder } r^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos \omega$$

Dasselbe Dreieck ergiebt noch für den Winkel, den die Verbindungslinie mit der x-Axe bildet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ resp. } \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

9. Aufgabe. Den Inhalt eines Dreiecks aus den Koordinaten der Ecken zu berechnen.

Fig. 7.



Aufl. Wir wollen wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde legen; die Koordinaten der Ecken seien $x_0\ y_0$, $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ (Fig. 7); wir nehmen ferner den einen Punkt, etwa R oder $x_0\ y_0$ als Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems an, in welchem die andern Punkte die Koordinaten $\xi_1\ \eta_1$ und $\xi_2\ \eta_2$ haben. Ziehen wir durch diese Punkte P und Q die Parallelen PP_1 und QQ_1 zur Ordinatentaxe, so ergiebt sich sofort für den Inhalt des Dreiecks

$$\Delta = PP_1R + PQQ_1P_1 - QQ_1R, \text{ woraus}$$
$$2\Delta = \xi_1\eta_1 + (\xi_2 - \xi_1)(\eta_1 + \eta_2) - \xi_2\eta_2 = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2.$$

Hätte man die Bezeichnung der Punkte vertauscht, so würde sich für den Inhalt herausgestellt haben

$$2\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Hienach wird man im allgemeinen für den Inhalt feststellen

$$2\Delta = \pm(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1).$$

Würde man aber auch einen negativen Inhalt zulassen und etwa feststellen, der Inhalt eines Dreiecks sei positiv, wenn der Umfang in der Bewegung durchlaufen wird, die der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzt ist, und negativ, wenn der Umfang in derselben Bewegung durchlaufen wird, so kann man streng die Formel aufstellen

$$2\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}.$$

Gehen wir nun auf das ursprüngliche Koordinatensystem zurück, so folgt

$$\begin{aligned} 2\Delta &= (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist das Koordinatensystem ein schiefwinkliges, so mufs man diese Determinante noch mit $\sin\omega$ multiplizieren, wo ω der Koordinatenwinkel ist, da die Höhen der Figuren PP_1R, PQQ_1P_1, QQ_1R erhalten werden, wenn wir die entsprechenden Koordinaten oder Koordinatendifferenzen noch mit $\sin\omega$ multiplizieren; also würde dann sein

$$2\Delta = \sin\omega . \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \sin\omega\,(x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_0 - x_0y_2).$$

II. Kapitel.

Die gerade Linie.

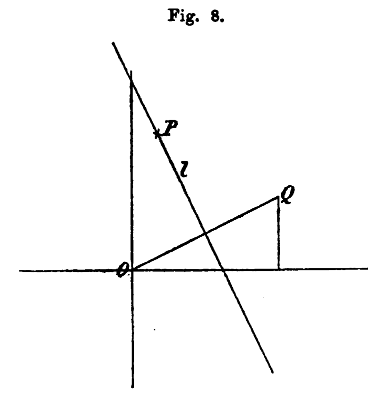
10. Die Koordinaten eines Punktes bestimmen denselben; wir können daher sagen: 2 Gleichungen von der Form $x = a$ und $y = b$ bestimmen einen Punkt. Es ergiebt sich aus dem, was über die Bestimmung der Koordinaten gesagt ist, dafs wenn man im Abstande a vom Anfangspunkte das Lot zur x-Axe zieht, alle Punkte des Lotes die x-Koordinate a haben; alle Punkte des Lotes erfüllen also die Gleichung $x = a$; dies veranlafst uns $x = a$ die Gleichung jener Geraden zu nennen. Analog wird $y = b$ die Gleichung einer Geraden sein, welche parallel der x-Axe im Abstande b ist, und also von der y-Axe die Strecke b abschneidet. Hiernach sind $y = 0$ und $x = 0$ die Gleichungen der x- resp. y-Axe.

Aus dieser Anschauung gewinnen wir nun die allgemeine Erklärung: Wenn die Koordinaten aller Punkte einer Geraden oder Kurve (krumme Linie) einer Gleichung genügen, so heifst diese Gleichung die Gleichung der Geraden oder Kurve.

11. Die Gleichung einer Geraden abzuleiten.

Es ist selbstverständlich, dafs zur Ableitung der Gleichung der betreffenden Linie in Bezug auf ein Koordinatensystem eine Eigenschaft derselben benutzt werden mufs, welche sich auf die Punkte der Linie bezieht. Wir benutzen zur Ableitung der Gleichung der Geraden die Eigenschaft, dafs jeder Punkt eines Lotes, das im Mittelpunkt einer begrenzten Gera den errichtet ist, von den Endpunkten gleiche Entfernung hat. Die zu bestimmende Gerade heifse l; das Koordinatensystem sei rechtwinklig (Fig. 8). Vom Anfangspunkte O fällen wir das Lot auf l und verlängern dasselbe um sich selbst bis Q, dessen Koordinaten mit A und B bezeichnet werden mögen; die Koordinaten eines willkürlichen Punktes von l bezeichnen wir (wie auch später die eines belie-

Fig. 8.



bigen Punktes einer Kurve) mit x und y. Dann folgt aus der Bestimmung der Entfernung zweier Punkte:

$$x^2 + y^2 = (x - A)^2 + (y - B)^2 \text{ oder}$$

$$1)\ 2Ax + 2By - (A^2 + B^2) = 0,$$

welche Gleichung also die Gleichung der Geraden ist. Wir machen aber hieraus sofort die allgemeine Folgerung: Jede beliebige Gleichung 1ten Grades zwischen den Koordinaten xy stellt uns die Gleichung einer Geraden vor, also eine Gleichung von der Form:

$$2)\ ax + by + c = 0.$$

Um dies zu beweisen, sei zunächst bemerkt, dafs eine Gleichung keine Änderung erleidet, wenn man sie mit einem willkürlichen Zahlenfaktor multipliziert, so dafs also die letzte Gleichung dasselbe besagt, als die Gleichung:

$$3)\ kax + kby + kc = 0.$$

Unsere Behauptung ist hienach bewiesen, wenn wir zeigen können, dafs diese letzte Gleichung (3) in die Form (1) übergehen kann. Es ist also zu setzen:

$$ka = 2A,\ kb = 2B,\ kc = -(A^2 + B^2).$$

Zunächst ergiebt sich:

$$k^2(a^2 + b^2) = 4(A^2 + B^2) = -4kc, \text{ also}$$

$$k = \frac{-4c}{a^2 + b_2}, \text{ und dann } A = \tfrac{1}{2}ka,\ B = \tfrac{1}{2}kb.$$

Die Form der Gleichung (2) bezeichnet man als die allgemeine Form der Gleichung einer Geraden.

Bemerkung. Wegen der Koordinatentransformation gilt dasselbe für ein schiefwinkliges System.

12. Normalform der Gleichung einer Geraden.

Bezeichnen wir die Länge des Lotes von O auf l mit δ, und mit α den Winkel, den dies Lot mit der x-Axe bildet, so ist

$$OQ = 2\delta,\ A = 2\delta\cos\alpha,\ B = 2\delta\sin\alpha, \text{ also } A^2 + B^2 = 4\delta^2.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (1) in (11.) ein, und dividieren durch 4δ, so ergiebt sich

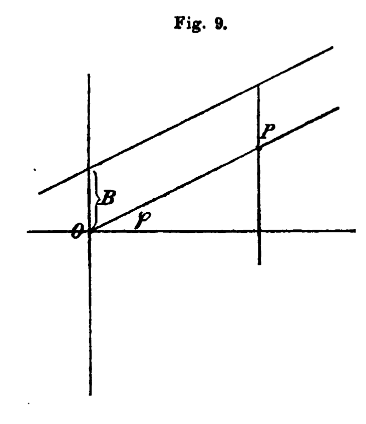
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0,$$

welche Gleichung wir mit Hesse als die Gleichung einer Geraden in der Normalform bezeichnen. Es sei noch bemerkt, dafs hier δ stets als positive Grösse zu betrachten ist.

13. Gleichung der Geraden nach Descartes.

Wir betrachten zuerst eine Gerade durch O (Fig. 9). Bezeichnen wir den Winkel der Geraden mit der x-Axe durch φ, und fällen von einem beliebigen Punkte P der Geraden das Lot auf die x-Axe, so ergiebt sich sofort

Fig. 9.



$$y = x \operatorname{tg} \varphi, \text{ oder } \operatorname{tg} \varphi = A$$

gesetzt,

$$y = Ax$$

als die Gleichung einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt. Geht die Gerade nicht durch den Anfangspunkt, sondern schneidet von der y-Axe ein Stück B ab, so ergiebt sich leicht, indem wir durch O zu dieser Geraden die Parallele ziehen

$$y - B = x \operatorname{tg} \varphi$$

oder allgemein ausgedrückt

$$y = Ax + B,$$

d. h., setzt man y gleich einem linearen Ausdruck in x, so stellt diese Gleichung die einer Geraden vor.

Bemerkung 1. B mufs selbstverständlich als mit dem Zeichen versehen betrachtet werden, ist also negativ, wenn die Gerade den negativen Teil der y-Axe schneidet.

Bemerkung 2. Ist das Koordinatensystem ein schiefwinkliges, so ist die Form der Gleichung der Geraden hier ebenso, nur erhalten wir für A die Bedeutung

$$A = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)},$$

wo ω den Koordinatenwinkel vorstellt.

Bemerkung 3. Aus der allgemeinen Form folgt

$$y = -\frac{b}{a} x - \frac{c}{a}$$

so dafs in derselben $-\frac{b}{a}$ die Tangente des Winkels der Geraden mit der x-Axe und $-\frac{c}{a}$ das von der y-Axe abgeschnittene Stück bedeutet.

14. Setzt man in der Gleichung $ax + by + c = 0$ noch $y = 0$, so folgt

$$ax + c = 0.$$

Dieses x bedeutet offenbar diejenige Länge, welche durch die Gerade von der x-Axe abgeschnitten wird, denn für diesen Schnittpunkt ist $y = 0$. Setzen wir diesen Wert gleich x_0, und bezeichnen ebenso das Stück, das von der y-Axe abgeschnitten wird, mit y_0, so ergeben sich die Werte

$$x_0 = -\frac{c}{a},\ y_0 = -\frac{c}{b}.$$

Dividieren wir nun die Gleichung der Geraden durch $-c$ und führen dann die Werte x_0 und y_0 ein, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - 1 = 0.$$

Bemerkung. Für ein schiefwinkliges Koordinatensystem ergiebt sich genau dasselbe.

15. Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt.

Die Koordinaten des Punktes seien $x_1 y_1$; wir nehmen an, die Gleichung der Geraden sei

$$1)\ y = Ax + B.$$

Ihr mufs genügt werden durch die Werte $x = x_1$ und $y = y_1$.
Es ist also:

$$2)\ y_1 = Ax_1 + B.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion dieser Gleichungen 1) und 2)

$$3)\ y - y_1 = A(x - x_1)$$

als Gleichung der gesuchten Geraden, die natürlich noch eine willkürliche Gröfse, nämlich A, enthält, da sie ja durch den einen Punkt noch nicht bestimmt ist.

Setzt man noch $A = \frac{l}{k}$, und dividiert durch l, so giebt dies

$$\frac{y - y_1}{l} = \frac{x - x_1}{k}.$$

Diese Gröſsen gleich einer Gröſse λ gesetzt, können wir die erhaltenen Gleichungen umformen in

$$4) \quad \begin{aligned} x &= x_1 + \lambda k \\ y &= y_1 + \lambda l, \end{aligned}$$

wodurch wir, indem wir λ variieren, sämtliche Punkte der Geraden darstellen.

16. Gleichung einer Geraden, die durch 2 gegebene Punkte geht.

1. Aufl. Sind die Koordinaten der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, so muſs die Gleichung sich durch folgende Formen darstellen lassen:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= A(x - x_1) \\ y - y_1 &= A(x - x_2) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} \text{ oder } (y - y_1)(x - x_2) - (y - y_2)(x - x_1) = 0.$$

$$\text{oder } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Aufl. Nehmen wir die Gleichung von der Form

$$ax + by + c = 0$$

so müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt aus Determinantensätzen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bemerkung. Der Ausdruck auf der linken Seite stellt für willkürliche Punkte den doppelten Inhalt des Dreiecks dar, dessen Ecken die 3 Punkte sind. Liegt der dritte Punkt auf der Ver-

bindungsgeraden, so ist der Inhalt Null, umgekehrt also der Inhalt eines Dreiecks ausgedrückt durch die Koordinaten der Eckpunkte gleich Null gesetzt giebt die Bedingung, dafs ein Punkt auf der Verbindungsgeraden der andern liegt, und kann daher als Gleichung der Geraden gelten.

17. Für die Gleichung einer Geraden sind nach dem Obigen folgende Formen gefunden:

1) $ax + by + c = 0$ allgemeine Form,

2) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$ Normalform,

3) $y = Ax + B$ Form von Descartes,

4) $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - 1 = 0$ Form mit den Axenabschnitten,

5) $y - y_1 = A(x - x_1)$ Gleichung einer unbestimmten Geraden durch einen Punkt,

6) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Determinantenform der Geraden durch 2 Punkte.

Rein geometrisch bestimmen wir eine Gerade durch 2 Bedingungen. Dem entspricht hier der Umstand, dafs hier 2 Konstante zu bestimmen sind; denn auch in der allgemeinen Form sind nur die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ und nicht alle 3 Gröfsen zu bestimmen.

18. Kommt es darauf an, die Gleichung einer Geraden aufzustellen, so sind nicht die Gröfsen x und y zu suchen, welche wir eben als die veränderlichen Koordinaten eines Punktes der Geraden bezeichnen, sondern die Koeffizienten, also $a : b : c$, oder α und δ, A und B, x_0 und y_0. Kombiniert man dagegen 2 Gleichungen von Geraden, denen zu gleicher Zeit genügt werden soll, so bedeuten x und y die Koordinaten des Schnittpunkts, da nur dieser beiden Gleichungen genügt. Hat man also die Gleichnngen von 2 Geraden

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

so erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen nach x und y die Koordinaten des Schnittpunktes

$$x = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \; y = \frac{ca_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Bem. Setzt man $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ und multipliziert mit x_3, so erhält man die homogenen Gleichungen:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$
$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0.$$

Man erhält dann das Resultat in der symmetrischen Form:

$$x_1 : x_2 : x_3 = bc_1 - b_1c : ca_1 - a_1c : ab_1 - a_1b$$
$$= \begin{vmatrix} bb_1 \\ cc_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} cc_1 \\ aa_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa_1 \\ bb_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

19. Aufgabe. Es soll untersucht werden, unter welcher Bedingung sich 3 Gerade in einem Punkte schneiden.

Die Gleichungen seien:

$$a\,x + b\,y + c\ = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Diese Gleichungen müssen für denselben Punkt erfüllt werden.

Indem wir $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ setzen, erhalten wir die 3 homogenen Gleichungen:

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$$
$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0,$$

woraus durch Elimination sofort folgt:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Aufgabe. Die Gleichungen von 2 Geraden sind gegeben, man soll den Winkel finden, den sie bilden.

Es seien die Gleichungen der Geraden

$$y = Ax + B \text{ und } y = A_1x + B_1.$$

Setzt man $A = \operatorname{tg} \varphi$ und $A_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ so sind φ und φ_1 die Winkel, welchen die Geraden mit der x-Axe bilden, also der gesuchte Winkel $\varphi_1 - \varphi$. Nun ist

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi}, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{A_1 - A}{1 + AA_1}.$$

Ist der Koordinatenwinkel kein rechter, sondern etwa ω, so ist

$$A = \frac{\sin \varphi}{(\sin \omega - \varphi)}, \; A_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin (\omega - \varphi_1)},$$

daraus folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \omega}{1 + A \cos \omega}, \; \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{A_1 \sin \omega}{1 + A_1 \cos \omega}$$

und daraus

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{(A_1 - A) \cdot}{1 + (A_1 + A) \cos \omega + AA_1}.$$

Bem. Sind die Gleichungen in der Form gegeben

$$ax + by + c = 0, \; a_1 x + b_1 x + c_1 = 0,$$

so ist nur $-\frac{a}{b}$ an Stelle von A, und $-\frac{a_1}{b_1}$ an Stelle von A_1 zu setzen, also für ein rechtwinkliges System ist

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{ab_1 - a_1 b,}{aa_1 + bb},$$

woraus noch folgt

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{ab_1 - a_1 b}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)}};$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)}};$$

für ein schiefwinkliges System wird

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{(ab_1 - a_1 b) \sin \omega}{aa_1 + bb_1 - (ab_1 + a_1 b) \cos \omega}.$$

21. Es ergeben sich hieraus die Bedingungen dafür, dafs 2 Gerade senkrecht resp. dafs sie parallel zu einander sind.

Für ein rechtwinkliges System ergiebt sich sofort, wenn wir die Form von Descartes zu Grunde legen

$$y = Ax + B \text{ und } y = A_1 x + B_1,$$

die Bedingung für Parallelität $A - A_1 = 0$,

die Bedingung für senkrechte Lage $AA_1 + 1 = 0$.

Sind die Gleichungen in der allgemeinen Form $ax + by + c = 0$ und $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ gegeben, so sind die entsprechenden Bedingungen:

$$ab_1 - a_1 b = 0$$
$$aa_1 + bb_1 = 0.$$

Bei einem schiefwinkligen System ist die erste Bedingung dieselbe, die zweite aber wird

$$1 + AA_1 + \cos\omega\,(A + A_1) = 0$$

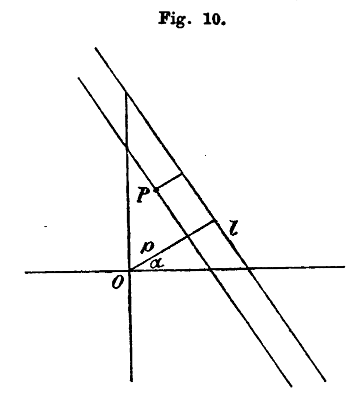
oder $aa_1 + bb_1 - \cos\omega\,(ab_1 + a_1 b) = 0$.

22. Aufgabe. Gegeben sind die Koordinaten eines Punktes und die Gleichung einer Geraden; man soll die Entfernung des Punktes von der Geraden bestimmen.

Aufl. Die Gerade l sei in der Normalform gegeben, also

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0 \text{ (Fig. 10)},$$

Fig. 10.



die Koordinaten des gegebenen Punktes P seien $x_1\, y_1$. Zieht man durch den Punkt P die Parallele l_1 zur gegebenen, so muss deren Gleichung die Form haben

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

wo also p das Lot vom Anfangspunkt auf diese Gerade l_1 ist. Setzt man die Koordinaten von p in diese Gleichung ein, so mufs sie erfüllt werden, d. h. es ist

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p = 0.$$

Der gesuchte Abstand ist aber $\delta - p$, also ergiebt sich für den gesuchten Abstand

$$D = \delta - (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha).$$

Es folgt hieraus der Satz: Setzt man in die Gleichung einer Geraden, welche in der Normalform gegeben ist, die Koordina-

ten eines Punktes, so ist der erhaltene Ausdruck der negative Abstand des Punktes von der Geraden.

Bem. Je nach der Lage des Punktes P hätte man als Abstand auch $p - \delta$ erhalten; um hier eine feste Bestimmung zu erhalten, ist es nötig, über das Zeichen eines Abstandes ein Abkommen zu treffen. Es werde nun festgestellt, dafs der Abstand eines Punktes von einer Geraden als positiv gilt, wenn der Punkt und der Anfangspunkt des Systems auf dem gleichen Flächenteil der Ebene liegen, so dafs also die Gerade nicht überschritten werden darf, wenn man vom Anfangspunkte zu jenem Punkt gelangen will. Unter Beachtung dieser Zeichenregel gilt der angegebene Satz ganz streng.

Ist die Gerade nicht in der Normalform gegeben, so führe man dieselbe auf die Normalform zurück. Da es leicht ist, jede Gleichung einer Geraden in die allgemeine Form zu bringen, so legen wir diese zu Grunde. Man habe also als Gleichung der Geraden

$$ax + by + c = 0.$$

Man setze

$$a = r \cos \alpha$$
$$b = r \sin \alpha$$
$$c = -r\delta,$$

dann ist

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad r = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ob das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, hängt davon ab, welches Zeichen c hat; da δ immer positiv ist, so mufs r immer das entgegengesetzte Zeichen von c haben. Die Gleichung der Geraden in der Normalform kann also geschrieben werden:

$$\frac{ax + by + c}{\mp \sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Der Abstand des Punktes $x_1 y_1$ von der Geraden ist also $\frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$, z. B. der Abstand des Anfangspunktes von der Geraden

$$\frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

23. Es sei die Gleichung einer Geraden $ax + by + c = 0$. Denken wir uns nun ein neues Koordinatensystem hergestellt,

dessen Axen wir mit ξ und η bezeichnen wollen, und sei jene die y-Axe, so ist die Gleichung derselben $\xi = 0$. Wir erhalten aber im allgemeinen bei einer solchen Transformation:

$$\xi = c_0 + a_0 x + b_0 y$$

$\xi = 0$ ist also so viel als $c_0 + a_0 x + b_0 y = 0$ und auch

$$ax + by + c = 0.$$

Dies kann nur sein, wenn sich diese letzten Gleichungen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Es mufs also sein

$$\xi = k(ax + bx + c).$$

Wir haben also den Satz: Ist die Gleichung einer Geraden $ax + by + c = 0$ und verwandelt man die Gleichung einer Linie in ein anderes System, in welcher die Gerade die neue Ordinatenaxe ist, so gilt die Transformationsgleichung

$$\xi = k(ax + by + c).$$

III. Kapitel.

Einführung einer abgekürzten Bezeichnung nebst einigen Anwendungen.

24. In Nr. 19 war die Bedingung dafür, dafs 3 Gerade

$$1)\quad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

durch einen Punkt gehen, in der Form gegeben

$$2)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingung läfst sich noch anders darstellen. Bestimmt man nämlich die Koordinaten des Schnittpunktes der ersten beiden Geraden, so mufs die dritte durch dieselben erfüllt sein. Dies kann nur sein, wenn die dritte Gleichung eine Folge der beiden andern ist, d. h. sie mufs sich linear aus den beiden andern zusammensetzen lassen, also etwa

$$3)\quad k_2^1(a_2x + b_2y + c_2) = k(ax + by + c) + k_1(a_1x + b_1y + c_1),$$

es mufs also gesetzt werden können

$$k_2^1 a_2 = ka + k_1 a_1$$
$$k_2^1 b_2 = kb + k_1 b_1$$
$$k_2^1 c_2 = kc + k_1 c_1.$$

Das Bestehen dieser 3 Gleichungen zieht eben wieder die Gleichung 2 nach sich. Setzen wir nun:

$$ax + by + c = l$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = l_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = l_2$$

d. h. verstehen wir unter l l_1 l_2 die links stehenden Ausdrücke, so können wir die Bedingung, dafs 3 Gerade durch einen Punkt gehen, kürzer so darstellen:

Es mögen symbolisch $l = o$, $l_1 = o$, $l_2 = o$ die Gleichungen von 3 Geraden darstellen, läfst sich dann eine Gleichung bilden

$$k_2^1 l_2 \mp kl + k_1 l_1$$

oder auch

$$kl + k_1 l_1 + k_2 l_2 \mp 0$$

d. h. giebt es konstante Faktoren derartig, dafs wenn man die Gleichungen von 3 Geraden mit denselben multipliziert, die Summe der Gleichungen identisch 0 giebt, so gehen die Geraden durch einen Punkt.

Bem. 1. Das Zeichen $\mp$ soll bedeuten, dafs man keine Gleichung zwischen veränderlichen und unbekannten Gröfsen hat, sondern dafs die eine Seite vollständig mit der andern in allen Teilen übereinstimmt.

Bem. 2. Die Einführung eines einfachen Buchstabens statt eines vollständigen Ausdrucks mit den Koordinaten bewirkt oft eine grofse Vereinfachung der Rechnung.

25. Sind $l = o$ und $l_1 = o$ die Gleichungen von 2 Geraden, so stellt $l + \lambda l_1 = 0$ die Gleichung einer Geraden dar, welche durch den Schnittpunkt jener beiden geht. Indem wir λ verändern, erhalten wir andere Gerade, die aber immer durch den Schnittpunkt jener gehen; hienach können wir sagen, $l + \lambda l_1 = 0$ stellt das ganze Linienbüschel durch den Schnittpunkt der beiden vor; diese Geraden selbst sind darin enthalten; $\lambda = 0$ giebt $l = 0$, und $\lambda = \infty$ giebt, nachdem durch λ dividiert ist, $l_1 = 0$.

26. Unter den symbolischen Gleichungen $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0\ldots$ wollen wir uns Gleichungen in der Normalform

denken. Setzt man in A statt x und y die Koordinaten irgend eines Punktes, so erhalten wir den negativen Abstand des Punktes von der Geraden. Die Gleichung $A - A_1 = 0$ stellt nun eine Gerade durch den Schnittpunkt von $A = 0$ und $A_1 = 0$ dar, und zwar eine solche Gerade, für welche der Abstand eines Punktes von der einen so grofs ist, als von der andern Geraden, da ja $A = A_1$ ist, es ist also die Gleichung der Winkelhalbierungslinie und zwar derjenigen, welche mit dem Anfangspunkte in demselben Flächenteile liegt. Daraus ist auch ersichtlich, dafs $A + A_1 = 0$ die Gleichung der Halbierungslinie des Nebenwinkels ist.

27. Die Gleichung $A - \lambda A_1 = 0$.

Diese Gleichung stellt zunächst eine Gerade durch den Schnittpunkt der Geraden $A = 0$ und $A_1 = 0$ dar. Aus jener Gleichung folgt nun $\frac{A}{A_1} = \lambda$. Es bedeutet also λ das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Geraden von den Geraden $A = 0_1$ und $A_1 = 0$. Bezeichnen wir die Winkel, welche unsere Gerade $A - \lambda A_1 = 0$ mit den andern Geraden bildet, mit ω und ω_1, so ergiebt sich leicht, dafs dieses Abstandsverhältnis

$$\lambda = \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$$

ist (Fig. 11).

Fig. 11.

Hienach stellt $A - \lambda A_1 = 0$ die Gleichung einer Geraden dar, welche durch den Schnittpunkt der Geraden geht und den Winkel derselben so teilt, dafs die Sinus der Teilwinkel das Verhältnis λ haben. Für den Nebenwinkel ändert sich das Zeichen von λ, und λ kann also jeden beliebigen Wert annehmen.

28. Satz. Die 3 innern Winkelhalbierungslinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Bew. Die 3 Geraden des Dreiecks seien in der Normalform $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, und der Anfangspunkt im Innern des Dreiecks. Die Winkelhalbierungslinien haben zu Gleichungen

$$1) \quad \begin{aligned} A_1 - A_2 &= 0 \\ A_2 - A &= 0 \\ A - A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Da die Summe der Gleichungen identisch 0 giebt, so gehen sie durch einen Punkt, für welchen noch $A = A_1 = A_2$ ist, d. h. der von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

Bem. Ebenso schneiden sich die Geraden

$$\begin{array}{lll} A - A_1 = 0 & A_2 - A = 0 & A_1 - A_2 = 0 \\ 2)\ A_1 + A_2 = 0 & 3)\ A + A_1 = 0 & 4)\ A_2 + A = 0 \\ A_2 + A = 0 & A_1 + A_2 = 0 & A + A_1 = 0 \end{array}$$

in einem Punkte. Multiplizieren wir nämlich die letzten Gleichungen mit -1 und addieren, so erhalten wir wieder 0 zur Summe. Die 4 so erhaltenen Punkte sind bekanntlich die Mittelpunkte der 4 Berührungskreise.

29. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien wiederum $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Denken wir uns nun durch die 3 Ecken Gerade gezogen, die sich in einem Punkte schneiden sollen, so sind die Gleichungen derselben zunächst

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda A_2 &= 0 \\ A_2 - \lambda_1 A &= 0 \\ A - \lambda_2 A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit λ_2, die zweite mit $\lambda\lambda_2$ und addieren, so giebt dies

$$A(1 - \lambda\lambda_1\lambda_2) = 0.$$

Soll dies identisch 0 sein, so mufs

$$\lambda\lambda_1\lambda_2 = 1 \text{ sein,}$$

d. h., schneiden sich 3 Gerade durch die Ecken eines Dreiecks in einem Punkte, so mufs das Produkt der Sinus der Teilwinkel entsprechend herumgezählt durch das Produkt der Sinus der andern Teilwinkel dividiert gleich 1 sein.

30. Satz. Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

1. Bew. Die Gleichungen der Seiten seien wieder $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel seien resp. $\alpha\, \beta\, \gamma$.

Setzt man die Gleichungen der Höhen resp.

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda A_2 &= 0 \\ A_2 - \lambda_1 A &= 0 \\ A - \lambda_2 A_1 &= 0, \end{aligned}$$

so ergiebt sich leicht

$$\lambda = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta},\ \lambda_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\ \lambda_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

also können wir die Gleichungen auch so darstellen

$$\begin{aligned} A_1 \cos\beta - A_2 \cos\gamma &= 0 \\ A_2 \cos\gamma - A \cos\alpha &= 0 \\ A \cos\alpha - A_1 \cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

Ihre Summe giebt 0. Wir sehen noch, dafs

$$A \cos\alpha = A_1 \cos\beta = A_2 \cos\gamma;$$

d. h. die Abstände des Höhenschnittpunkts von den Seiten resp. multipliziert mit den Cosinus der gegenüberstehenden Winkel sind gleich.

2. Beweis. Die Ecken mögen die Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ haben; dann sind die Gleichungen der Seiten:

$$\begin{aligned} x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + x_2 y_3 - x_3 y_2 &= 0 \\ x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + x_3 y_1 - x_1 y_3 &= 0 \\ x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 - x_2 y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgen die Gleichungen der Höhen

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) &= 0 \\ (x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) &= 0 \\ (x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Die Summe derselben giebt 0. Für die Koordinaten des Höhenschnittpunkts ergiebt sich:

$$Dx = x_2 x_3 (y_3 - y_2) + x_3 x_1 (y_1 - y_3) + x_1 x_2 (y_2 - y_1) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$

$$Dy = y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_1)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$D = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

31. Satz. Die 3 Mittellinien (Schwerlinien) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

1. Beweis. Nehmen wir dieselbe Bezeichnung und berücksichtigen, dafs die Sinus der Winkel der Mittellinien mit den anstofsenden Seiten sich umgekehrt wie diese selbst verhalten, so erhalten wir für die Gleichungen der Mittellinien

$$A_1 \sin\beta - A_2 \sin\gamma = 0$$
$$A_2 \sin\gamma - A \sin\alpha = 0$$
$$A \sin\alpha - A_1 \sin\beta = 0,$$

der Abstand des Schwerpunkts von den Seiten ist also den Seiten umgekehrt proportional.

2. Beweis. Wir bezeichnen die Ecken mit $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$. Da die Mittelpunkte der Seiten resp. die Koordinaten haben

$$\frac{x_2+x_3}{2}\ \frac{y_2+y_3}{2};\quad \frac{x_3+x_1}{2},\ \frac{y_3+y_1}{2};\quad \frac{x_1+x_2}{2}\ \frac{y_1+y_2}{2},$$

so sind die Gleichungen der Mittellinien:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_3+x_1}{2} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplizieren wir die letzten Reihen mit 2 und führen eine Zerlegung der Determinanten herbei, so ergiebt sich zunächst für die Gleichung der ersten Mittellinie

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die andern erhalten wir, indem wir die Indices um 1 vermehren, wobei nach 3 wieder 1 zu setzen ist. Dies giebt für die andern

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Summe der 3 Gleichungen giebt 0.

32. Unter derselben Annahme wie vorher soll untersucht werden $A + A_1 + A_2 = 0$.

Diese Gleichung kann entstanden gedacht werden aus den Gleichungen $A = 0$ und $A_1 + A_2 = 0$. Die durch die erste Glei-

chung dargestellte Gerade geht also durch den Schnittpunkt der andern, d. h. durch den Punkt, in welchem die Seite $A = 0$ von der Halbierungslinie des äufsern Gegenwinkels getroffen wird. Ebenso geht sie durch die Punkte, in welchen die andern äufsern Winkelhalbierungslinien die Gegenseiten treffen, da wir sie auch zusammensetzen können aus $A_1 = 0$ und $A_2 + A = 0$, und $A_2 = 0$ und $A + A_1 = 0$. Wir erhalten den Satz: Die Punkte, in welchen die äufsern Winkelhalbierungslinien eines Dreiecks die Gegenseiten treffen, liegen in einer Geraden.

Fassen wir die Bedeutung von A an sich ins Auge, so ergiebt sich für diese Gerade die Eigenschaft, die Summe der Lote von einem Punkte der Geraden auf die resp. Geraden $A = o$, $A_1 = o$, $A_2 = o$ ist 0, es mufs also, wenn wir vom Zeichen absehen, immer ein Lot gleich der Summe der beiden andern sein.

Bemerk. Analoge Betrachtungen knüpfen sich an die Gleichungen:

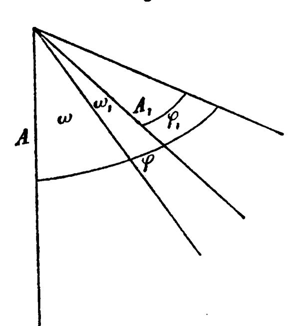
$$A_1 + A_2 - A = 0$$
$$A_2 + A - A_1 = 0$$
$$A + A_1 - A_2 = 0.$$

Die hierdurch dargestellten Geraden gehen durch die Schnittpunkte von 2 innern Halbierungslinien mit den Gegenseiten und den Schnittpunkt der dritten äufsern Winkelhalbierungslinie mit ihrer Gegenseite.

33. 4 Gerade durch einen Punkt können wir folgendermafsen darstellen:

$$A = 0,\ A_1 = 0,\ A - \lambda A_1 = 0,\ A - \mu A_1 = 0.$$

Fig. 12.



Hier heifst $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\left(\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}\right)}{\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}\right)}$ (Fig. 12) das anharmonische Verhältnis der beiden letzten Geraden zu den beiden ersten. Ist das Verhältnis -1 also

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = -\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1}$$

so heifst das Verhältnis harmonisch und die Geraden heifsen harmonische Linien oder Strahlen. 4 harmonische Linien lassen sich also in der Form darstellen:

$$A = 0,\ A_1 = 0,\ A - \lambda A_1 = 0,\ A + \lambda A_1 = 0.$$

Bem. Durch Halbierung eines Winkels und seines Nebenwinkels erhält man 4 harmonische Strahlen, die Gleichungen sind:

$$A = 0,\ A_1 = 0,\ A - A_1 = 0,\ A + A_1 = 0.$$

34. Aufg. Das anharmonische Verhältnis von 4 Geraden

$$U = 0,\ U_1 = 0,\ U - lU_1 = 0,\ U - mU_1 = 0$$

zu bestimmen, wo $U = 0$, $U_1 = 0$ die Gleichungen von Geraden in der allgemeinen Form sind.

Nehmen wir an, dafs U durch Division mit dem Faktor k in die Normalform übergeht, U_1 durch Division mit k_1, so ist

$$U = kA,\ U_1 = k_1 A_1,$$

die gegebenen Gleichungen lassen sich also dann in der Form darstellen:

$$A = 0,\ A_1 = 0,\ A - \frac{lk_1}{k} A_1 = 0,\ A - \frac{mk_1}{k} A_1 = 0.$$

Das anharmonische Verhältnis ist:

$$\frac{\left(\frac{lk_1}{k}\right)}{\left(\frac{mk_1}{k}\right)} = \frac{l}{m}.$$

4 Gerade sind also harmonisch, wenn sie sich folgendermafsen darstellen lassen:

$$U = 0,\ U_1 = 0,\ U - \lambda U_1 = 0,\ U + \lambda U_1 = 0.$$

35. Wir wollen jetzt 4 Strahlen durch einen 5[ten] schneiden. Die Gleichungen der ersten seien $U = 0$, $U_1 = 0$, $U - \lambda U_1 = 0$, $U - \mu U_1 = 0$. Machen wir den 5[ten] zur x-Axe, so wird die allgemeine Form der Gleichungen nicht geändert; es sei dann:

$$U \equiv ax + by + c = 0,\ U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0.$$

Da die Gleichung des 5[ten] $y = 0$ ist, so sind die Koordinaten der Schnittpunkte mit den ersten Geraden

$$x_0 = -\frac{c}{a},\ x_1 = -\frac{c_1}{a},$$

für die x-Koordinate der beiden andern Schnittpunkte erhalten wir sofort:

$$x_2 = \frac{-c + \lambda c_1}{a - \lambda a_1},\ x_3 = \frac{-c + \mu c_1}{a - \mu a_1},$$

aber

$$\frac{-c+\lambda c_1}{a-\lambda a_1}=\frac{-\frac{c}{a}+\frac{\lambda a_1}{a}\cdot\frac{c_1}{a_1}}{1-\frac{\lambda a_1}{a}},$$

also

$$x_2=\frac{x_0-\frac{\lambda a_1}{a}x_1}{1-\frac{\lambda a_1}{a}},$$

ebenso

$$x_3=\frac{x_0-\frac{\mu a_1}{a}x_1}{1-\frac{\mu a_1}{a}}.$$

Ist nun $\mu=-\lambda$, so stellen sich die Schnittpunkte in der Form dar:

$$x_0,\ x_1,\ \frac{x_0-kx_1}{1-k},\ \frac{x_0+kx_1}{1+k},$$

d. h. sind die 4 Geraden harmonisch, so wird auch die Transversale in harmonischen Punkten geschnitten.

36. 4 harmonische Punkte stellen sich folgendermaſsen dar:

$$x_0\,y_0;\ x_1\,y_1;\ \frac{x_0-\lambda x_1}{1-\lambda}\ \frac{y_0-\lambda y_1}{1-\lambda};\ \frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}\ \frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda};$$

die Koordinaten eines fünften Punktes seien a und b. Die Verbindungslinien desselben mit den ersten stellen sich dann so dar:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ \frac{x_0-\lambda x_1}{1-\lambda}, & \frac{y_0-\lambda x_1}{1-\lambda} & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ \frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda} & \frac{y_0+y_1}{1+\lambda} & 1\end{vmatrix}=0.$$

Multiplizieren wir die unteren Reihen der letzten Determinantengleichungen resp. mit $1 - \lambda$ und $1 + \lambda$, so lassen sich dieselben leicht zerlegen und diese Gleichungen werden:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d. h. die 4 Geraden sind harmonisch. Wir haben also den Satz: Die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes mit 4 harmonischen Punkten sind 4 harmonische Strahlen.

37. Es seien die Gleichungen von 4 ganz beliebigen Geraden $V = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Wir können uns diese Gleichungen mit 4 solchen konstanten Gröfsen multipliziert denken, dafs die Summe der so erhaltenen Gleichungen identisch 0 giebt; also $\alpha V + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 \doteq 0$.

Dies ist deshalb möglich, weil wir 3 homogene Gleichungen mit 4 Unbekannten erhalten. Wir setzen:

$$\alpha V \doteq U, \ \alpha_1 V_1 \doteq U_1, \ \alpha_2 V_2 \doteq U_2, \alpha_3 V_3 \doteq U_3.$$

Es ist dann:

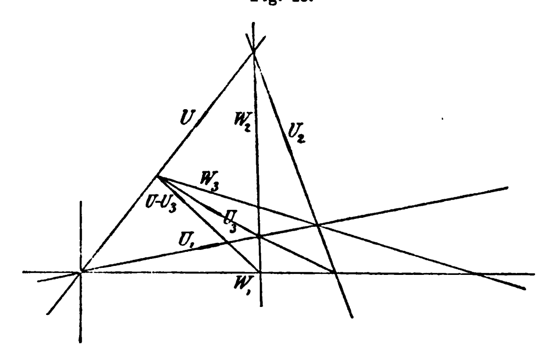
$$U + U_1 \doteq -(U_2 + U_3)$$
$$U + U_2 \doteq -(U_1 + U_3)$$
$$U + U_3 \doteq -(U_1 + U_2).$$

Daraus ergiebt sich, dafs

$$U + U_1 = 0, \ U + U_2 = 0, \ U + U_3 = 0$$

die Gleichungen der Diagonalen des durch die 4 Geraden be-

Fig. 13.



stimmten vollständigen Vierseits sind; (Fig. 13) es sei gesetzt:

$$U + U_1 \mp W_1 = 0$$
$$U + U_2 \mp W_2 = 0$$
$$U + U_3 \mp W_3 = 0.$$

Nun ist

$$W_1 + W_2 \mp U + (U + U_1 + U_2) \mp U - U_3$$
$$W_2 + W_3 \mp U + (U + U_2 + U_3) \mp U - U_1$$
$$W_3 + W_1 \mp U + (U + U_1 + U_3) \mp U - U_2$$

Es ist also $W_1 + W_2 = 0$ die Gerade, welche den Schnittpunkt von W_1 und W_2 mit dem von U und U_3 verbindet. Aus der Form aber ergiebt sich, dafs

$$U = 0, \quad U_3 = 0, \quad W_1 + W_2 = 0 \text{ und } W_3 = 0$$

harmonisch sind, und hieraus, dafs die Diagonalen W_1 und W_2 durch die angegebenen Geraden harmonisch geteilt werden, oder wir können den Satz aussprechen: In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die andern harmonisch geteilt.

38. Es waren vorher die Gleichungen von Transversalen eines Dreiecks angegeben, die sich in einem Punkte schneiden, und wir hatten die Höhen und Schwerlinien als besondere Fälle entwickelt. Die Gleichungen solcher Ecktransversalen lassen sich im allgemeinen auch folgendermassen darstellen:

$$\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$$
$$\lambda_2 A_2 - \lambda A = 0$$
$$\lambda A - \lambda_1 A_1 = 0.$$

Für die Höhen war $\lambda = \cos\alpha$, $\lambda_1 = \cos\beta$, $\lambda_2 = \cos\gamma$,
für die Schwerlinien $\lambda = \sin\alpha$, $\lambda_1 = \sin\beta$, $\lambda_2 = \sin\gamma$.

Es ergiebt sich nun leicht, dafs, wenn jene Geraden sich in einem Punkte schneiden, dies auch der Fall ist mit den Geraden

$$\frac{A_1}{\lambda_1} - \frac{A_2}{\lambda_2} = 0$$
$$\frac{A_2}{\lambda_2} - \frac{A}{\lambda} = 0$$
$$\frac{A}{\lambda} - \frac{A_1}{\lambda_1} = 0.$$

Hienach schneiden sich in einem Punkte die Geraden:

$$\frac{A_1}{\cos\beta} - \frac{A_2}{\cos\gamma} = 0, \quad \frac{A_2}{\cos\gamma} - \frac{A}{\cos\alpha} = 0, \quad \frac{A}{\cos\alpha} - \frac{A_1}{\cos\beta} = 0.$$

Der Schnittpunkt hat die Eigenschaft, dafs die Entfernungen von den Seiten proportional den Cosinus der Winkel des Dreiecks sind. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises.

Ebenso erhält man als sich in einem Punkte schneidende Ecktransversalen

$$\frac{A_1}{\sin\beta} - \frac{A_2}{\sin\gamma} = 0\ \frac{A_2}{\sin\gamma} - \frac{A}{\sin\alpha} = 0,\ \frac{A}{\sin\alpha} - \frac{A_1}{\sin\beta} = 0.$$

Der Schnittpunkt hat die Eigenschaft, dafs die Entfernungen von den Seiten den Sinus der Gegenwinkel, also den Seiten selbst proportional sind*).

Sonst sei noch bemerkt, dafs die Ecktransversalen, welche wir in dieser Weise gegenüberstellen, erhalten werden, wenn man die Winkel, welche sie mit einer Seite bilden, an der andern Seite, an der sie anstofsen, anträgt.

IV. Kapitel.

Der Kreis.

39. Aufgabe. Die Gleichung des Kreises für rechtwinklige Koordinaten aufzustellen.

Aufl. Die charakteristiche Eigenschaft des Kreises ist die, dafs alle Punkte desselben vom Mittelpunkt gleiche Entfernung haben. Sind die Koordinaten des Mittelpunktes a und b, und ist r der Radius, so ergiebt sich

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

oder $$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des Kreises.

Ist der Mittelpunkt der Anfangspunkt, so nimmt die Gleichung die einfachere Form an:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Liegt ferner der Anfangspunkt auf dem Kreise, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 - 2r\,x = 0.$$

---

*) Nebenher sei noch bemerkt, dafs dieser Punkt derjenige ist, für welchen die Summe der Quadrate der Lote auf die Seiten ein Minimum ist.

40. Die Gleichung eines Kreises ist hienach vom zweiten Grade, aber nicht jede Gleichung zweiten Grades zwischen x und y wird einen Kreis vorstellen. Um dies zu untersuchen, wollen wir die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades aufstellen. Dies ist

$$a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2 + 2a_4 x + 2a_5 y + a_6 = 0.$$

Soll dies die Gleichung eines Kreises sein, so mufs sie durch Multiplikation mit einem Faktor in jene übergeführt werden können.

Es mufs also sein:

$$ka_1 = 1,\ ka_2 = 0,\ ka_3 = 1,$$
$$ka_4 = -a,\ ka_5 = -b,\ ka_6 = a^2 + b^2 - r^2.$$

Die ersten 3 Gleichungen ergeben, dafs $a_1 = a_3$ und $a_2 = 0$ sein mufs; die andern 3 ergeben keine weitern Bedingungen. Nehmen wir also diese Bedingungen an, so geht die Gleichung des 2ten Grades, nachdem sie durch den 1ten Koeffizienten dividiert ist, in folgende Form über

$$x^2 + y^2 + 2cx + 2dy + e = 0,$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$(x + c)^2 + (y + d)^2 - (c^2 + d^2 - e) = 0,$$

welche Form mit der frühern übereinstimmt.

41. Die Gleichung des Kreises enthält 3 Koeffizienten als konstante Gröfsen, so dafs wir daraus schliefsen können, er wird durch 3 Bedingungen, z. B. 3 Punkte bestimmt. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Gleichung des Kreises aufzustellen, der durch 3 gegebene Punkte mit den Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ geht.

Die Gleichung des Kreises bringen wir in die Form:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Indem wir feststellen, dafs $x_1 y_1$ etc. dieser Gleichung genügen, erhalten wir, wenn noch $a^2 + b^2 - r^2 = -P$ gesetzt wird

$$2ax_1 + 2by_1 + P = x_1^2 + y_1^2$$
$$2ax_2 + 2by_2 + P = x_2^2 + y_2^2$$
$$2ax_3 + 2by_3 + P = x_3^2 + y_3^2.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich a b und P, also auch r leicht bestimmen, wodurch die Aufgabe gelöst wird. Aus Determinantensätzen ergiebt sich noch, dafs der Nenner dieser Gröfsen den Ausdruck enthält:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck wird 0, wenn die 3 Punkte in einer Geraden liegen, woraus folgen würde, dafs a, b, P unendlich werden. Soll dies nicht sein, so dürfen die 3 Punkte nicht in einer Geraden liegen; ein Kreis kann also nur 2 Punkte einer Geraden enthalten.

42. Bedeutung von $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$ für beliebige Punkte.

Wir zerlegen den Ausdruck $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$ in 2 Teile, nämlich $(x - a)^2 + (y - b)^2$ und $- r^2$. Der erste Teil bedeutet das Quadrat der Entfernung des Punktes xy vom Mittelpunkt. Liegt der Punkt aufserhalb, so ergiebt sich für den ganzen Ausdruck das Quadrat der Tangente vom Punkte an den Kreis, da die 3 Geraden, nämlich die Distanz des Punktes vom Mittelpunkt, die Tangente und der betreffende Radius ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Liegt der Punkt innerhalb, so wollen wir auf der Verbindungslinie von xy mit ab in dem Punkte das Lot errichten, und vom Schnittpunkt des Lotes mit dem Kreise den Radius ziehen. Es ergiebt sich dann für das Quadrat der halben Sehne $r^2 - [(x - a)^2 + (y - b)^2] = - [(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2]$. In beiden Fällen bezeichnet der Ausdruck die sogenannte Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis.

43. Kombination eines Kreises mit einer Geraden.

Die Gleichung des Kreises sei $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

„ „ der Geraden „ $\dfrac{x - x_1}{k} = \dfrac{y - y_1}{l} = \lambda$,

woraus folgt 1) $x = x_1 + k\lambda$
$y = y_1 + l\lambda$.

Dies in die Gleichung des Kreises gesetzt, giebt

$$2)\quad (k^2 + l^2)\lambda^2 + 2\lambda[k(x_1 - a) + l(y_1 - b)] + (x^2 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0.$$

Ist nun eine Gleichung:

$$L\lambda^2 + 2M\lambda + \mathrm{N} = 0,$$

so sind die Wurzeln

$$\lambda = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}.$$

Hieraus geht hervor, dafs wenn

a) $M^2 - LN = 0$, die Wurzeln einander gleich,
b) $M^2 - LN > 0$, „ „ reell und ungleich,
c) $M^2 - LN < 0$, „ „ imaginär sind.

Es werde ferner an die Formel erinnert:

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2,$$

woraus folgt:

$$3)\ (k^2 + l^2)[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2] = [k(x_1 - a) + l(y_1 - b)]^2 + [k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2.$$

Bilden wir nun von der Gleichung (2) die Gröfse $M^2 - LN$, welche man als Determinante der Gleichung bezeichnet, so ergiebt sich

$$[k(x_1 - a) + l(y_1 - b)]^2 - (k^2 + l^2)[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2]$$

oder mit Benutzung von (3)

$$r^2(k^2 + l^2) - [k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2.$$

Wir sehen also, die Wurzeln von (2) sind

a) reell u. ungleich, wenn $r^2(k^2 + l^2) - [k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2 > 0$
b) imaginär, „ $r^2(k^2 + l^2) - [k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2 < 0$
c) gleich, „ $r^2(k^2 + l^2) - [k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2 = 0$.

Die Gleichung der Geraden können wir nun schreiben:

$$k(y - y_1) - l(x - x_1) = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichung statt x und y die Koordinaten des Mittelpunktes und dividieren durch $\sqrt{k^2 + l^2}$, so erhalten wir (Nr. 22) den Abstand des Mittelpunktes von der Geraden; nennen wir denselben δ, so ist

$$\delta^2 = \frac{[k(y_1 - b) - l(x_1 - a)]^2}{k^2 + l^2}.$$

Aus den Bedingungen a, b, c erhalten wir also durch Einführung von δ:

Die Wurzeln sind

a) reell und ungleich, wenn $r > \delta$
b) imaginär, „ $r < \delta$
c) gleich, „ $r = \delta$.

Wir sagen von der Geraden, sie werde in diesen Fällen Sekante, ideelle Sekante, Tangente.

44. Wir hatten

$$\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \lambda,$$

also

$$x - x_1 = k\lambda, \ y - y_1 = l\lambda,$$

mithin

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \lambda^2 (k^2 + l^2),$$

also stellt $\lambda \sqrt{k^2 + l^2}$ den Abstand des Punktes xy vom Punkte $x_1 y_1$ dar, den wir mit σ bezeichnen wollen. Durch Einführung von σ geht die Gleichung (2) in No. 43 über in

$$\sigma^2 + \frac{2\sigma}{\sqrt{k^2 + l^2}} [k (x_1 - a) + l (y_1 - b)] + (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0.$$

Wir erhalten 2 Schnittpunkte und demgemäfs 2 Abstände des Punktes $x_1 y_1$ von denselben; wir wollen dieselben mit σ_1 und σ_2 bezeichnen. Nach dem Satz von der Bedeutung der Koeffizienten einer Gleichung folgt sofort

$$\sigma_1 \sigma_2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0$$

d. h. das Produkt der Stücke einer Sekante von einem festen Punkte bis zum Kreise ist konstant, es ist die Potenz dieses Punktes in Bezug auf den Kreis.

45. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente eines Kreises aufzustellen, wenn der Punkt auf der Peripherie gegeben ist.

Die Bezeichnung sei die frühere, die Gleichung der Tangente sei also

$$1) \quad \frac{y - y_1}{l} = \frac{x - x_1}{k} = \lambda.$$

Setzen wir die dadurch erhaltenen Werte von x und y in die Gleichung des Kreises ein, so erhalten wir die bekannte Gleichung (43, 2)

$$2) \quad (k^2 + l^2) \lambda^2 + 2 [k (x_1 - a) + l (y_1 - b)] \lambda + (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0.$$

Eine Tangente an irgend eine Kurve definieren wir als die Verbindungsgerade von 2 unendlich nahen Punkten. Der Punkt $x_1 y_1$ soll auf dem Kreise liegen, es ist also:

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = 0;$$

daraus folgt, dafs die Gleichung (2) eine Wurzel 0 hat, was auch sein mufs, da ein Punkt der Geraden und des Kreises der Punkt $x_1 y_1$ ist. Die andere Wurzel ist

$$\lambda = -\frac{2\{k(x_1 - a) + l(y_1 - b)\}}{k^2 + l^2}.$$

Für eine Tangente mufs der diesem Werte von λ entsprechende Punkt der vorige sein, es mufs auch dieser Wert von λ verschwinden, d. h. es mufs sein:

$$k(x_1 - a) + l(y_1 - b) = 0$$

oder 3) $$\frac{l}{k} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}.$$

Die Gleichung der Tangente wird hienach:

$$\frac{y - y_1}{x_1 - a} + \frac{x - x_1}{y_1 - b} = 0$$

oder

$$(y - y_1)(y_1 - b) + (x - x_1)(x_1 - a) = 0.$$

Setzen wir noch

$$x - x_1 = (x - a) - (x_1 - a)$$
$$y - y_1 = (y - b) - (y_1 - b),$$

so erhalten wir

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) - (x_1 - a)^2 - (y_1 - b)^2 = 0$$

oder endlich

4) $$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) - r^2 = 0.$$

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so wird die Gleichung

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0.$$

46. Aufgabe. Die Gleichung der Berührungssehne eines Punktes in Bezug auf einen Kreis zu finden, d. h. die Gleichung der Geraden, welche die Berührungspunkte der Tangenten verbindet, die man von dem Punkte an den Kreis ziehen kann.

Aufl. Erfüllen die Koordinaten uv und $u_1 v_1$ von 2 Punkten, durch welche eine Gerade geht, die Gleichungen

$$au + bv + c = 0$$
$$au_1 + bv_1 + c = 0,$$

so ist die Gleichung der Geraden

$$ax + by + c = 0;$$

denn dies ist die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte geht, da sie durch die Koordinaten der Punkte erfüllt wird.

Dies läſst sich auch so einsehen, die Gleichung der Geraden ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

man erhält aber aus obigen Gleichungen

$$a : b : c = \begin{vmatrix} v & 1 \\ v_1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & u_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix},$$

also geht die obige Determinantengleichung über in

$$ax + by + c = 0.$$

Die Koordinaten des gegebenen Punktes seien $x_1\,y_1$, die Koordinaten der Berührungspunkte seien $u\,v$ und $u_1\,v_1$. Die Gleichungen der Tangenten sind also:

$$(x - a)(u - a) + (y - b)(v - b) - r^2 = 0$$
$$(x - a)(u_1 - a) + (y - b)(v_1 - b) - r^2 = 0,$$

welche Gleichungen für $x = x_1$ und $y = y_1$ erfüllt werden müssen; es ist also

$$(x_1 - a)(u - a) + (y_1 - b)(v - b) - r^2 = 0$$
$$(x_1 - a)(u_1 - a) + (y_1 - b)(v_1 - b) - r^2 = 0.$$

Wir können diese Gleichungen auf die Form bringen:

$$Au + Bv + C = 0$$
$$Au_1 + Bv_1 + C = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung der gesuchten Geraden, indem wir hier x und y statt u und v oder u_1 und v_1 setzen; die gesuchte Gleichung ist also

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) - r^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form als die der Tangente. Liegt der Punkt $x_1\,y_1$ innerhalb des Kreises, so wird man für die Berührungspunkte keine reellen Werte erhalten; dies wird sich dadurch zeigen, daſs die Wurzeln der Gleichung, die wir erhalten, wenn wir diese mit der Gleichung des Kreises kombinieren, imaginär werden. Trotzdem ist diese Gerade reell, und wir bezeichnen sie als die Polare des Punktes. Aus der Gleichung geht noch hervor, daſs sie die Gleichung der Tangente ist, wenn der Punkt $x_1\,y_1$ auf der Peripherie des Kreises liegt.

47. Die Gleichung der Verbindungsgeraden von $x_1 y_1$ mit dem Mittelpunkt ab des Kreises ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (y_1 - b)\, x + (a - x_1)\, y + b x_1 - a y_1 = 0;$$

die Gleichung der Polare $x(x_1 - a) + y(y_1 - b) - a(x_1 - a) - b(y_1 - b) - r^2 = 0$.

Da nun $(y_1 - b)(x_1 - a) + (a - x_1)(y_1 - b) = 0$, so folgt, dafs diese Geraden auf einander senkrecht stehen. Hienach steht auch die Tangente auf dem Radius nach dem Berührungspunkte senkrecht.

48. Die Gleichung der Polare hat die Eigentümlichkeit, dafs x_1 mit x und y_1 mit y vertauscht werden können. Denken wir uns nun auf der Polare einen Punkt xy, den wir der Präzision halber mit $x_0 y_0$ bezeichnen wollen, so erfüllt derselbe die Bedingung:

$$(x_1 - a)(x_0 - a) + (y_1 - b)(y_0 - b) - r^2 = 0.$$

Die Polare des Punktes aber ist:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) - r^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn wir setzen $x = x_1$ und $y = y_1$, d. h. die Polare des Punktes $x_0 y_0$ geht durch $x_1 y_1$ oder also: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, die wir als Polare eines Punktes denken, so geht die Polare dieses Punktes immer durch den Pol der Geraden.

49. Wir wollen nun der Einfachheit halber den Mittelpunkt eines Kreises in den Anfangspunkt legen. Der Kreis hat dann die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

die Polare eines Punktes $x_1 y_1$ hat zur Gleichung

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0,$$

die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $x_1 y_1$ ist

$$\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \lambda.$$

Für λ zur Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes erhalten wir daraus:

$$\lambda^2 (k^2 + l^2) + 2\lambda (k x_1 + l y_1) + (x_1{}^2 + y_1{}^2 - r^2) = 0$$

oder führen wir $\sigma = \lambda \sqrt{k^2 + l^2}$ ein

$$\sigma^2 + \frac{2\sigma}{\sqrt{k^2 + 1^2}} (kx_1 + ly_1) + x_1{}^2 + y_1{}^2 - r^2 = 0,$$

wo σ also die Entfernung des Punktes $x_1\, y_1$ von einem der Schnittpunkte bezeichnet. Sind nun σ_1 und σ_2 die Wurzeln der Gleichung, und ist τ die Entfernung des zu $x_1\, y_1$ harmonisch konjugierten Punktes in Bezug auf die Schnittpunkte des Kreises vom Punkte $x_1 y_1$, so ist

$$\tau = \frac{2\sigma_1\, \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = -\frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2 - r^2)\sqrt{k^2 + l^2}}{kx_1 + ly_1}.$$

Für die Entfernung τ^1 des Punktes $x_1\, y_1$ von dem Schnittpunkte der Geraden mit der Polare erhalten wir ebenfalls

$$\tau^1 = -\frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2 - r^2)\sqrt{k^2 + l^2}}{kx_1 + ly_1}.$$

Wir dürfen nur die Gleichungen kombinieren:

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0,$$

$$\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \lambda = \frac{\tau^1}{\sqrt{k^2 + l^2}}.$$

Wir erhalten also den Satz: Wenn man durch einen Punkt $x_1\, y_1$ als Pol eine Sekante legt, so wird dieselbe durch Pol, Polare und Kreis harmonisch geteilt.

50. Die Gleichungen von 2 Kreisen seien

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1{}^2 = 0,$$

die wir der Kürze halber mit $S = 0$ und $S_1 = 0$ bezeichnen wollen.

Es ist dann die Gleichung $S - S_1 = 0$ oder

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + a^2 + b^2 - r^2 - (a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2) = 0$$

die Gleichung einer Geraden. Für die Punkte, welche diese Bedingung erfüllen, ist also $S = S_1$, oder wir können, wenn wir an die Bedeutung von S und S_1 als Potenzen in Bezug auf den Kreis denken, folgenden Satz aussprechen:

Der geometrische Ort des Punktes, für den die Potenzon in Bezug auf 2 Kreise gleich grofs sind, ist eine Gerade; sie heifst Chordale oder Potenzlinie.

Haben die Kreise $S = 0$ und $S_1 = 0$ zwei Punkte gemein, so ist klar, dass die Chordale durch den Schnittpunkt derselben geht, da $S - S_1 = 0$ erfüllt wird, wenn $S = 0$ und $S_1 = 0$ ist. Berühren sich die Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkte die Chordale, was aus der eben gemachten Bemerkung hervorgeht.

Dafs endlich die Chordale zur Centrale senkrecht steht, ist sofort zu ersehen, wenn man die Gleichung der Centrale aufstellt. Dieselbe lautet

$$x(b - b_1) + y(a_1 - a) + ab_1 - a_1 b = 0.$$

Es braucht kaum erinnert zu werden, dafs die Chordale immer reell bleibt, auch wenn die Schnittpunkte der beiden Kreise imaginär sind.

51. Die Gleichungen von 3 Kreisen seien in der Hauptform:

$$S = 0, \ S_1 = 0, \ S_2 = 0,$$

dann sind die Chordalen von je zwei Kreisen

$$S - S_1 = 0, \ S_1 - S_2 = 0, \ S_2 - S = 0.$$

Da die Summe der linken Seiten 0 ist, so schneiden sich die Chordalen in einem Punkte, welcher gleiche Potenzen in Bezug auf alle Kreise hat; denn es ist für ihn $S = S_1 = S_2$.

52. Die Gleichung von zwei Kreisen sei $S = 0$ und $S_1 = 0$, also die Gleichung der Chordale $S - S_1 = 0$. Setzen wir die Koordinaten eines Punktes des Kreises $S = 0$ in S_1 hinein, so bedeutet dies die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis; dieselbe sei t^2, also

$$t^2 = \overline{S_1},$$

wo der Strich bedeutet, dafs für x und y die Koordinaten eines Punktes in $S = 0$ gesetzt sind. Um $S - S_1$ in die Normalform zu bringen, ist durch $2\sqrt{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b_1)^2} = 2c$ zu dividieren, wo c die Centrale der Kreise bedeutet. Der Abstand desselben Punktes von S von der Chordale ist also

$$\frac{\overline{S} - \overline{S_1}}{2c} = \pm d.$$

Da aber $\overline{S} = 0$ ist, so ist

$$d = \pm \frac{\overline{S_1}}{2c}$$

und hienach $t^2 = \pm 2cd$, d. h. die Potenz eines Punktes eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis ist gleich dem doppelten Produkt der Centrale und des Lotes von dem Punkt auf die Chordale.

Für irgend 2 Kreise erhalten wir noch die Gleichung

$$\frac{t^2}{t_1^2} = \frac{d}{d_1}.$$

53. Die Gleichung $S - \lambda S_1 = 0$ stellt, wenn S und S_1 die Ausdrücke wie vorher bedeuten, offenbar einen Kreis vor, dessen Gleichung in der Hauptform $\frac{S - \lambda S_1}{1 - \lambda} = 0$ ist. Diese Gleichung kann auch geschrieben werden

$$\frac{S}{S_1} = \lambda.$$

In Bezug auf die Bedeutung von S ergiebt sich: Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Potenzen in Bezug auf zwei Kreise ein bestimmtes Verhältnis haben, ist ein Kreis, welcher mit den gegebenen Kreisen dieselben Schnittpunkte hat. Sind dieselben nicht reell, so können wir sagen, dafs der Kreis mit den andern dieselbe Chordale hat, denn:

$$\frac{S - \lambda S_1}{1 - \lambda} - S = \frac{\lambda}{1 - \lambda}(S - S_1).$$

Demnach stellt $S - \lambda S_1 = 0$ alle Kreise dar, welche eine gemeinschaftliche Chordale haben, und die wir als Schar bezeichnen. Als Grenzfall gehören jene ersten Kreise natürlich zu ihnen, sie entsprechen den Werten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$; $\lambda = 1$ giebt die Chordale, die als Kreis mit unendlichem Radius anzusehen ist.

54. Es ist noch die Frage, ob es nicht einen solchen Wert von λ geben kann, dafs der Radius des gesuchten Kreises 0 ist. Wir bringen zu dem Ende die Gleichung $S - \lambda S_1 = 0$ auf die Hauptform. Dies giebt

$$1)\quad \left(x - \frac{a - \lambda a_1}{1 - \lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{b - \lambda b_1}{1 - \lambda}\right)^2 +$$

$$\frac{a^2 + b^2 - r^2 - \lambda(a_1^2 + b_1^2 - r_1^2)}{1 - \lambda} - \frac{(a - \lambda a_1)^2 + (b - \lambda b_1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 0.$$

Soll also der Radius des Kreises 0 sein, so müssen die beiden letzten Glieder zusammen 0 geben. Geordnet erhalten wir

$$\lambda^2 r_1{}^2 + \lambda \left\{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 - r^2 - r_1{}^2\right\} + r^2 = 0,$$

woraus

$$2)\ \lambda = \frac{-c^2 + r^2 + r_1{}^2 \pm \sqrt{(c - r - r_1)(c + r + r_1)(c - r + r_1)(c + r - r_1)}}{2 r_1{}^2}$$

wo $c^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2$ gesetzt ist und c offenbar die Centrale der beiden gegebenen Kreise bedeutet. Wir sehen hienach, dafs zwei solche Fälle vorhanden sind, aufser wenn die Wurzel verschwindet, was offenbar stattfindet, wenn sich die Kreise berühren. In diesem Falle giebt es nur einen solchen Punkt, der zu dieser Kreisschar gehört, und das ist eben der Berührungspunkt. Es giebt ferner solche reelle Punkte nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, d. h. wenn sich die Kreise nicht schneiden.

Soll der Radius des gesuchten Kreises nicht 0 sein, sondern einen gegebenen Wert ϱ haben, so ergiebt sich sofort die Gleichung aus 1)

$$3)\ \varrho^2 = \frac{\lambda^2 r_1{}^2 + \lambda \left\{c^2 - r^2 - r_1{}^2\right\} + r^2}{(1 - \lambda)^2},$$

woraus wir schliefsen, dafs es immer zwei solche Kreise giebt, die einen gegebenen Radius haben und zur Schar gehören.

V. Kapitel.

Die Parabel.

55. Erklärung. Der geometrische Ort des Punktes, der von einem Punkt soweit entfernt liegt als von einer Geraden, heifst Parabel. Der feste Punkt heifst der Brennpunkt, die feste Gerade die Leitlinie der Parabel. Der Abstand des Punktes von der Geraden wird als Halbparameter bezeichnet.

56. Aufgabe. Die Gleichung der Parabel für ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufzustellen, dessen x-Axe das Lot vom Brennpunkt auf die Leitlinie und dessen y-Axe die Leitlinie ist.

Aufl. Es sei A ein Punkt der Parabel Taf. I, Fig. 1, F der Brennpunkt, l die Leitlinie, die wir zugleich als y-Axe annehmen wollen. Die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie bezeichnen wir mit p. Es ergiebt sich dann leicht

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=x$$

und daraus

$$1)\quad y^2-2px+p^2=0$$

als Gleichung der Parabel für dies Koordinatensystem.

Verschieben wir den Anfangspunkt um $\frac{p}{2}$ nach O, dem Mittelpunkt des Lotes FL von F auf die Leitlinie, und nennen die neuen x-Koordinaten eines Punktes x^1, so ist

$$x^1=x-\frac{p}{2}.$$

Dann geht die Gleichung der Parabel über in

$$2)\quad y^2-2px^1=0.$$

Machen wir endlich den Brennpunkt zum Anfangspunkte und nennen x'' die neuen x-Koordinaten, so giebt dies

$$3)\quad y^2-2px''-p^2=0.$$

Setzen wir in der Gleichung (2) $x^1=0$, so erhalten wir $y^2=0$, d. h. wir erhalten in diesem Falle 2 gleiche Wurzeln, woraus folgt, dafs die neue y-Axe eine Tangente an die Kurve ist, dessen Berührungspunkt eben dieser Anfangspunkt ist. Wir nennen diese Tangente Scheiteltangente und den Berührungspunkt Scheitel.

57. Aus der Gleichung soll der ungefähre Verlauf der Kurve festgestellt werden.

Wir legen die Hauptform zu Grunde, die nämlich, bei der die Scheiteltangente die y-Axe ist. Wir haben also

$$y^2-2px=0.$$

Unter der Voraussetzung, dafs p positiv ist, giebt es hienach keinen Punkt der Parabel, dessen x-Koordinate negativ ist, d. h. die Parabel liegt stets auf einem Felde der Ebene, die wir uns durch die Scheiteltangente zerlegt denken. Es entsprechen ferner jeder x-Koordinate zwei y-Koordinaten, d. h. die Parabel liegt symmetrisch zur x-Axe, die deshalb als Parabelaxe bezeichnet wird. Mit wachsendem x wird auch y gröfser, das indessen langsamer wächst. Um dies noch leichter einzusehen,

fällen wir von einem Punkt A der Parabel das Lot auf die Axe und verbinden ihn auch mit dem Scheitel. Die letzte Gerade bilde mit der Axe den Winkel φ, dann ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = \frac{2px}{xy} = \frac{2p}{y}.$$

tg φ und also φ wird desto kleiner, je größer y wird, ist $y = \infty$, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = 0$$

d. h. in der Unendlichkeit nähert sich die Parabel wieder der Axe; doch kann dies nur als eine analytische Erklärung angesehen werden, da die Punkte der Parabel sich desto mehr von der Axe entfernen, je größer die x-Koordinaten werden, und die Entfernung von der Axe wird nur im Verhältnis zu dieser Koordinate klein.

58. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente an die Parabel abzuleiten, wenn die Richtung gegeben ist.

Aufl. Wir nehmen die Gleichung in der Form an:

$$y = Ax + B.$$

Wenn wir die Gleichung dieser Geraden mit der Parabel kombinieren, so müssen die beiden dadurch erhaltenen Schnittpunkte in einen zusammenfallen. Eliminieren wir y, so erhalten wir die Gleichung:

$$(Ax + B)^2 - 2px = 0 \quad \text{oder} \quad A^2x^2 - 2(p - AB)x + B^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine Wurzel, die linke Seite ist also ein vollständiges Quadrat, wenn ihre Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$(p - AB)^2 - A^2B^2 = 0$$

oder

$$B = \frac{p}{2A}.$$

Die Gleichung der Tangente ist mithin:

$$y = Ax + \frac{p}{2A}.$$

59. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente abzuleiten, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Wir benutzen die vorige Auflösung. Ist $x_1 y_1$ der gegebene Punkt, so muſs die Bedingung erfüllt werden:

$$y_1 = Ax_1 + \frac{p}{2A},$$

woraus folgt

$$A^2\, x_1 - Ay_1 + \frac{p}{2} = 0,$$

$$A = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}, \text{ oder da } y_1^2 - 2px_1 = 0$$

$$A = \frac{y_1}{2x_1},$$

also haben wir die Gleichung:

$$y = \frac{y_1}{2x_1} \cdot x + \frac{px_1}{y_1} \text{ oder } y = \frac{y_1^2}{2x_1\, y_1}\, x + \frac{px_1}{y_1},$$

$$y = \frac{px}{y_1} + \frac{px_1}{y_1}, \text{ oder endlich}$$

$$yy_1 - p\,(x + x_1) = 0.$$

60. Es seien $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ die Koordinaten von zwei Punkten der Parabel. Die Gleichung der Verbindungslinie ist

$$(y - y_1)(x_1 - x_2) = (x - x_1)(y_1 - y_2)$$

oder

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Da aber $y_1^2 = 2px_1$ und $y_2^2 = 2px_2$, so auch

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p\,(x_1 - x_2)$$

$$\text{und 1)}\quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2},$$

also wird die Gleichung der Geraden

$$\text{2)}\quad y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}\,(x - x_1),$$

und es ergiebt sich für die Tangente des Winkels, den die Gerade mit der x-Axe bildet,

$$A = \frac{2p}{y_1 + y_2} = \frac{p}{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)},$$

oder es ist

$$3)\quad \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{A}.$$

So lange also A, d. h. die Richtung der Sehnen unverändert bleibt, so lange auch $\frac{y_1 + y_2}{2}$, d. h. die Ordinate des Mittelpunktes der Sehnen. Dies giebt den Satz: Die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Parabel liegen in einer Geraden, welche parallel der Axe ist; solche Gerade bezeichnen wir als Durchmesser der Parabel.

61. Setzen wir hierin noch $y_1 = y_2$, so dafs also auch $x_1 = x_2$ wird und die beiden Punkte in einen zusammenfallen, so geht die Gleichung (1) in Nr. 60 über in:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1 \text{ oder da } y_1^2 = 2px_1,$$

$$yy_1 - p(x + x_1) = 0,$$

d. h. in die Gleichung der Tangente, was auch natürlich ist; in Worten: die Tangente, welche einer Sehne parallel ist, berührt die Parabel in einem Punkte, dessen Ordinate gleich der Ordinate des Mittelpunkts der Sehne ist.

62. Fällt man Taf. I, Fig. 1, vom Brennpunkt F das Lot FH auf die Sehne, so ist der Winkel, den diese Gerade mit der x-Axe bildet, um 90° gröfser, als der Winkel der Sehne; sie bildet also mit der negativen x-Axe den Winkel $90 - \varphi$, wenn φ der Winkel ist, den die Sehne mit der positiven x-Axe bildet; daraus folgt, dafs das Lot die Leitlinie in einem Punkte E schneidet, so dafs $LE = \frac{p}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{p}{A} = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ist, wo L der Punkt ist, in dem die Axe die Leitlinie schneidet.

63. Sind $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ die Koordinaten von zwei Parabelpunkten, so sind die Gleichungen der Tangenten in diesen Punkten

$$yy_1 - px = px_1$$

$$yy_2 - px = px_2.$$

Durch Subtraktion folgt

$$y(y_1 - y_2) = p(x_1 - x_2),$$

also erhalten wir für die y-Koordinate des Schnittpunktes

$$y = \frac{p(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

nach (1) in Nr. 60.

Es ergiebt sich hienach, dafs folgende Punkte auf einer zur Axe parallelen Linie liegen:

1) der Mittelpunkt einer Sehne und aller parallelen Sehnen,
2) der Berührungspunkt der parallelen Tangente,
3) der Schnittpunkt des Lots vom Brennpunkt auf die Sehne mit der Leitlinie,
4) der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten der Sehne.

64. Die x-Koordinate des Schnittpunktes zweier Tangenten werde nun mit ξ_0 bezeichnet, die des Mittelpunktes der Sehne mit ξ_2, die des Berührungspunktes der parallelen Tangente mit ξ_1. Eine leichte Rechnung ergiebt

$\xi_0 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}$, oder wenn man $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$ und $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$ setzt,

$$\xi_0 = \frac{y_1 y_2}{2p};$$

ferner ist

$$\xi_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4p},$$

$$\xi_1 = \frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}{2p} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{8p} + \frac{y_1 y_2}{4p},$$

also

$$\xi_1 = \frac{\xi_0 + \xi_2}{2}$$

d. h. das Stück eines Durchmessers vom Schnittpunkt zweier Tangenten bis zum Mittelpunkt der Berührungssehne wird durch die Parabel halbiert.

65. Setzt man in der Gleichung der Tangente $y = 0$, so giebt der dadurch erhaltene Wert von x den Punkt, in welchem die Tangente die x-Axe schneidet. Dies giebt

$$x = -x_1.$$

Daraus folgt: Der Scheitel der Parabel ist der Mittelpunkt zwischen dem Fuſspunkte des Lotes von einem Parabelpunkte auf die Axe und dem Punkte, in welchem die zugehörige Tangente die Axe schneidet.

66. Unter Normale versteht man das Lot im Berührungspunkte einer Tangente auf dieselbe. Hieraus ergiebt sich auch leicht die Gleichung derselben, sie wird

$$y - y_1 = -(x - x_1)\frac{y_1}{p}$$

oder

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0.$$

Setzt man hier $y = 0$, so giebt dies

$$-py_1 = -y_1(x - x_1)$$

oder also

$$x - x_1 = p.$$

$x - x_1$ wird in dieser Bedeutung von x als Subnormale bezeichnet. Wir erhalten also für die Parabel die charakteristische Eigenschaft, daſs die Subnormale konstant ist und zwar gleich dem halben Parameter.

67. Die Gleichung einer Tangente ist

$$y = Ax + \frac{p}{2A},$$

also die Gleichung des Lotes vom Brennpunkte auf diese Tangente

$$y = -\frac{x}{A} + \frac{p}{2A}.$$

Mit der ersten kombiniert, giebt dies $x = 0$, d. h. das Lot vom Brennpunkt auf eine Tangente trifft dieselbe in dem Punkte, in welchem die Scheiteltangente sie schneidet.

68. Die Scheiteltangente halbiert alle Verbindungslinien des Brennpunkts mit Punkten der Leitlinie. Verlängert man also das vom Brennpunkte auf eine Tangente gefällte Lot FM Taf. I, Fig. 1 um sich selbst bis A_1, so ist A_1 ein Punkt der Leitlinie. Errichtet man nun in A_1 das Lot auf die Leitlinie, so ist der Schnittpunkt A desselben mit der Tangente ein Punkt der Parabel, da A von F und der Leitlinie gleich weit entfernt ist, und da der Punkt einer Tangente angehört, der Berührungspunkt. Eine

Verbindungslinie vom Brennpunkt mit einem Parabelpunkte nennt man Leitstrahl (Radius vector); wir können hienach folgenden Satz aussprechen:

Wenn man von einem Parabelpunkte das Lot auf die Leitlinie fällt, auch den Leitstrahl zieht, so wird der von beiden Geraden gebildete Winkel durch die Tangente halbiert.

Die Normale in dem Parabelpunkte mufs also den Nebenwinkel halbieren, d. h. den Winkel, welchen Leitstrahl und Durchmesser bilden. Daraus folgt die Eigenschaft, dafs ein Lichtstrahl, der von dem Brennpunkt ausgeht, von der Parabel parallel der Axe reflektiert wird.

Verlängert man noch die Tangente, bis sie die Axe in X schneidet, so folgt, dafs AFX ein gleichschenkliges Dreieck ist, der Brennpunkt also von einem Punkte der Parabel ebenso weit entfernt ist, als von dem Punkte, in welchem die Tangente die Axe schneidet.

Trifft die Normale in A die Axe in N, so ergiebt sich sofort, dafs auch $XF = FX$ ist, also der Brennpunkt der Mittelpunkt des Stücks der Axe ist, das durch Tangente und Normale abgeschnitten wird.

Leicht ist endlich noch einzusehen, dafs die Tangente zwischen Axe und Berührungspunkt durch die Scheiteltangente halbiert wird, und dafs der Winkel, den ein Leitstrahl mit der Axe bildet, doppelt so grofs ist, als der Winkel, den die Tangente mit der Axe bildet.

69. Satz. Der Winkel von 2 Leitstrahlen am Brennpunkte ist doppelt so grofs, als der Winkel, den die Tangenten in den betreffenden Parabelpunkten mit einander bilden.

Beweis. Zwei Punkte der Parabel (Taf. I, Fig. 1) seien A und B, deren Tangenten sich in S schneiden mögen, ferner schneide die Tangente in A die Axe in X, die Tangente in B aber die Axe in Y, dann ist

$$F(AN) = 2X(AN)$$
$$F(NB) = 2Y(NB),$$

wo N der Schnittpunkt der Normale mit der Axe ist, also

$$F(AB) = 2\{X(AN) + Y(NB)\} = 2S(AB).$$

70. Die Tangente in A bilde mit der Axe den Winkel φ, die in B den Winkel ψ, dann sind die Gleichungen der Tangenten

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + \frac{p}{2} \cot \varphi,$$

$$y = x \operatorname{tg} \psi + \frac{p}{2} \cot \psi.$$

Wir führen nun ein Koordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der Brennpunkt ist, das aber sonst dieselben Axenrichtungen hat.

Dann bleibt y unverändert, und es wird

$$x = \xi + \frac{p}{2};$$

die Gleichungen werden also

$$1) \quad \begin{aligned} y &= \xi \operatorname{tg} \varphi + \frac{p}{2} [\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi] \\ y &= \xi \operatorname{tg} \varphi + \frac{p}{2} [\operatorname{tg} \psi + \cot \psi] \end{aligned}$$

oder

$$2) \quad \begin{aligned} y \sin 2\varphi - 2\xi \sin^2 \varphi - p &= 0 \\ y \sin 2\psi - 2\xi \sin^2 \psi - p &= 0. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir, so erhalten wir die Gleichung einer Geraden, die durch den Schnittpunkt der Tangenten geht,

$$y (\sin 2\varphi - \sin 2\psi) - 2\xi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi) = 0$$

oder $y \sin (\varphi - \psi) \cos (\varphi + \psi) - \xi \sin (\varphi - \psi) \sin (\varphi + \psi) = 0$

oder $y = \xi \operatorname{tg} (\varphi + \psi)$,

die Gleichung einer Geraden durch den Brennpunkt, es ist also diese Gerade die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten mit dem Brennpunkte.

Bilden nun zwei Tangenten mit den Axen resp. die Winkel φ und ψ, so die Leitstrahlen die Winkel 2φ und 2ψ, und eine Gerade, welche den Winkel $\varphi + \psi$ mit der Axe bildet, halbiert den Winkel jener Leitstrahlen. Es ergiebt sich somit der Satz:

„Zieht man von einem Punkte an eine Parabel die Tangenten, auch die Leitstrahlen nach den Berührungspunkten, so halbiert die Verbindungslinie des Punktes mit dem Brennpunkte den Winkel der Leitstrahlen.“

71. Man lege an die Parabel (Taf. I, Fig. 1) eine dritte Tangente in C, welche die Tangenten der Punkte A und B in T und U schneiden mag. Es halbiert FT den Winkel $F(AC)$ und FU den Winkel $F(CB)$, wobei wir die Drehung von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe als positiv festhalten, also ist

$$F(TU) = \tfrac{1}{2} F(AB) = \tfrac{1}{2} \{4R - F(BA)\};$$

ferner $\quad \tfrac{1}{2} F(BA) = S(BA),$

also $$F(TU) = 2R - S(BA),$$
und $FTSU$ sind die Ecken eines Kreisvierecks. Es gilt also der Satz:

„Zieht man an eine Parabel drei Tangenten, so geht der dem dadurch bestimmten Dreieck umschriebene Kreis durch den Brennpunkt.“

72. Sind die Gleichungen von drei Tangenten

$$yy_1 - px - px_1 = 0,$$
$$yy_2 - px - px_2 = 0,$$
$$yy_3 - px - px_3 = 0,$$

dann leitet man leicht ab, dafs die Gleichungen der Höhen des dadurch bestimmten Dreiecks sind:

$$py + y_1 x - \frac{p}{2}(y_2 + y_3) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} = 0,$$
$$py + y_2 x - \frac{p}{2}(y_3 + y_1) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} = 0,$$
$$py + y_3 x - \frac{p}{2}(y_1 + y_2) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} = 0.$$

Dieselben geben resp. mit $y_2 - y_3$, $y_3 - y_1$, $y_1 - y_2$ multipliziert in der Summe 0. Durch einfache Subtraktion von 2 Gleichungen ergiebt sich dann

$$x = -\frac{p}{2},$$

d. h. der Höhenschnittpunkt liegt auf der Leitlinie.

„In jedem Dreieck von 3 Tangenten einer Parabel schneiden sich die Höhen auf der Leitlinie.“

73. Die Sehne AB möge die Leitlinie in D schneiden (Taf. I, Fig. 1). Wir fällen noch die Lote AA_1 und BB_1 auf die Leitlinie; dann ist

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AF}{BF},$$

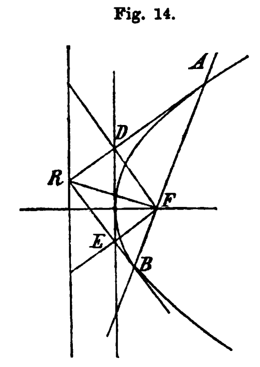
also halbiert FD den Aufsenwinkel des Dreiecks FAB. Da auch ST (ev. verlängert) den inneren Winkel $F(AB)$ halbiert, so stehen SF und FD auf einander senkrecht. Dies giebt den Satz:

„Bestimmt man von einem Punkte die Berührungssehne, und verbindet den Brennpunkt mit jenem Punkte und dem Schnitt-

punkte der Berührungssehne und Leitlinie, so stehen diese Linien senkrecht auf einander."

74. Es sei AB (Fig. 14) eine durch den Brennpunkt gehende Sehne, die Tangenten in A und B mögen sich in R schneiden; da der Winkel derselben halb so grofs ist, als der Winkel der Leitstrahlen (Nr. 69), so mufs er ein rechter sein. Fällt man dann von F die Lote FD und FE auf die Tangenten, so erhalten wir durch diese Lote und die Tangenten ein Rechteck, dessen Ecken D und E auf der Scheiteltangente liegen; es mufs also FR durch die Scheiteltangente halbiert werden, woraus folgt, dafs R, der Schnittpunkt der Tangenten, auf der Leitlinie liegt, also haben wir den Satz:

Fig. 14.



„Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne die Tangenten an die Parabel, so schneiden sich dieselben auf der Leitlinie unter einem rechten Winkel." .

Bem. Der Satz ergiebt sich auch als Zusatz von Nr. 72.

75. Wenn man von 2 beliebigen Punkten A und B der Parabel (Taf. I, Fig. 1) die Lote AA_1 und BB_1 auf die Leitlinie fällt und F mit A_1 und B_1 verbindet, so sind die Lote von A und B auf diese Verbindungslinien die Tangenten in den Punkten; dieselben mögen sich in S schneiden. Aus kongruenten Dreiecken folgt

$$F(AS) = A_1(SA), \quad F(SB) = B_1(BS),$$

also

$$F(AB) = A_1(SA) + B_1(BS) = 2R + 2\varphi,$$

wo φ der Winkel an der Grundlinie A_1B_1 des gleichschenkligen Dreiecks SA_1B_1 ist. Dafs dies Dreieck gleichschenklig ist, folgt daraus, dafs, wenn man vom Mittelpunkt der Sehne AB das Lot auf die Leitlinie fällt, dasselbe durch S und durch den Mittelpunkt von A_1B_1 gehen mufs.

Hieraus ergiebt sich dann leicht

$$S(B_1A_1) = F(BA),$$

d. h. fällt man von 2 Parabelpunkten die Lote auf die Leitlinie, so ist der Winkel, der am Schnittpunkte der Tangenten durch

diese Fufspunkte gespannt wird, gleich dem Winkel, der am Brennpunkte durch die Parabelpunkte gespannt wird.

76. Der Winkel $S(B_1A_1)$ (Taf. I, Fig. 1) sei mit 2ω bezeichnet, derselbe wird durch SF in 2 Teile, $2\omega_1$ und $2\omega_2$, zerlegt, von denen jeder durch die Tangente halbiert wird, so dafs

$$S(B_1B) = \omega_2 = S(BF),$$

ebenso

$$S(FA) = \omega_1 = S(AA_1).$$

Das Lot SE von S auf die Leitlinie halbiert den ganzen Winkel 2ω, also ist $S(BF) = S(EA) = A(SF)$; die Dreiecke SBF und SAF sind also ähnlich, woraus folgt

$$SF^2 = FA \cdot FB,$$

d. h. die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Brennpunkte ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen des Brennpunktes von den Berührungspunkten der Tangenten, die man von dem Punkte an die Parabel ziehen kann.

77. Zusatz. Liegt der Punkt auf der Leitlinie, so geht die Berührungssehne durch den Brennpunkt. Da das betreffende Dreieck rechtwinklig ist, so folgt, dafs die Verbindungslinie des Punktes mit dem Brennpunkte das Lot zur Sehne sein mufs, also trifft das Lot von einem Punkte der Leitlinie auf die Berührungssehne diese im Brennpunkte.

Bem. Dieser Satz ist auch eine Folge der Sätze in No. 62 und No. 69.

78. Drei Tangenten in ABC bestimmen (Taf. I, Fig. 1) ein Dreieck STU, so dafs der um das Dreieck beschriebene Kreis durch den Brennpunkt F geht. Verbindet man nun F mit T und U, so werden die ähnlichen Dreiecke SFA und SFB in zwei zerlegt, die wieder einander ähnlich sind, denn die Winkel bei T und U sind nach dem Satz vom Peripheriewinkel einander gleich, daraus folgt

$$\frac{BU}{US} = \frac{ST}{TA},$$

d. h. zwei Tangenten vom Berührungspunkte bis zum Schnittpunkte werden durch eine dritte umgekehrt proportional geteilt.

79. Die Scheiteltangente teile diese Tangenten SA und SB resp. in M und Q, dann ist also

$$\frac{BQ}{SQ} = \frac{SM}{AM}.$$

Das Lot von S auf die Scheiteltangente sei SS_0, die Lote von A und B auf dieselbe AA_0 und BB_0, dann ist

$$\frac{BQ}{SQ} = \frac{BB_0}{SS_0}, \quad \frac{SM}{AM} = \frac{SS_0}{AA_0},$$

also

$$\frac{BB_0}{SS_0} = \frac{SS_0}{AA_0},$$

also haben wir den Satz:

„Das Lot vom Schnittpunkte zweier Tangenten auf die Scheiteltangente ist die mittlere Proportionale zwischen den Loten der Berührungspunkte auf dieselbe Gerade."

80. Es ist ferner

$$T(CF) = S(UF) = S(EA) = A(SF),$$

d. h. wenn man an eine Parabel eine Tangente zieht, von einem beliebigen Punkte der Tangente die zweite und denselben Punkt mit dem Brennpunkte verbindet, so ist der dadurch bestimmte Winkel konstant, nämlich gleich dem Winkel der Tangente mit dem betreffenden Leitstrahl.

81. Man nehme wieder (Taf. I, Fig. 2) zwei Tangenten SA und BS mit der Berührungssehne AB, und dem zugehörigen, d. h. durch den Mittelpunkt M von AB gehenden Durchmesser; SM schneide die Parabel in M_0. Wir setzen $MA = \eta$; die Koordinaten von M seien ferner x_0 und y_0, so dafs auch S und M_0 die Ordinate y_0 haben; ist dann noch φ der Winkel, den die Sehne mit der Axe bildet, so ergiebt sich für die Koordinaten x, y von A und x^1, y^1 von B leicht

$$x = x_0 + \eta \cos\varphi, \quad x^1 = x_0 - \eta \cos\varphi,$$
$$y = y_0 + \eta \sin\varphi, \quad y^1 = y_0 - \eta \sin\varphi.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung der Parabel $y^2 - 2px = 0$ ein, so mufs sie erfüllt werden, d. h.

1) $y_0^2 + 2y_0\eta \sin\varphi + \eta^2 \sin^2\varphi = 2px_0 + 2p\eta \cos\varphi,$

2) $y_0^2 - 2y_0\eta \sin\varphi + \eta^2 \sin^2\varphi = 2px_0 - 2p\eta \cos\varphi.$

Durch Addition und Subtraktion ergiebt sich daraus

3) $y_0^2 + \eta^2 \sin^2\varphi = 2px_0;$

4) $y_0 \sin\varphi = p \cos\varphi.$

Aus (4) folgt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{y_0}$, also

$$\sin^2 \varphi = \frac{p^2}{y_0^2 + p^2}.$$

Dies in (3) eingesetzt:

$$y_0^2 + \frac{p^2 \eta^2}{y_0^2 + p^2} = 2px_0$$

oder

$$\eta^2 = \frac{\eta_0^2 + p^2}{p^2} \{ 2px_0 - y_0^2 \};$$

wenn wir die x-Koordinate von M_0 mit ξ_0 bezeichnen, so ist $y_0^2 = 2p\xi_0$, und mithin

$$\eta^2 = \frac{p^2 + 2p\xi^0}{p^2} (2px_0 - 2p\xi_0) = 2(p + 2\xi_0)(x_0 - \xi_0).$$

Es ist nun $\frac{p}{2} + \xi_0$ der Abstand des Punktes M_0 von der Leitlinie; setzen wir $\frac{q}{2}$ für denselben, und $x_0 - \xi_0 = \xi$, so ergiebt sich

$$5) \quad \eta^2 = 2q\xi.$$

Diese Gleichung können wir als die Gleichung der Parabel ansehen in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen x-Axe der Durchmesser durch M_0 und dessen y-Axe die Tangente in M_0 ist, da sie der Sehne AB parallel ist.

Die Form der Gleichung der Parabel ist also genau dieselbe wie für das erste System. Zugleich ergiebt sich, dafs auch die Gleichungen der Tangenten die alte Form annehmen, wobei nur die konstanten Gröfsen eine weniger einfache Bedeutung haben.

82. Quadratur der Parabel.

Unter Quadratur eines Flächenstücks versteht man die Bestimmung desselben, womöglich in solcher Darstellung, dafs sich dasselbe als Quadrat konstruieren läfst. Hier handelt es sich um die Aufgabe, eine Fläche zu bestimmen, die von der Parabel und einer Sehne begrenzt wird, ein Parabelsegment.

Die Bezeichnung sei die von (81) (Taf. I, Fig. 2). Wir halbieren noch MA in N, und MB in P, und ziehen die Parallelen zur Axe NN_0 und PP_0, so dafs N_0 und P_0 die Parabelpunkte

dieser Durchmesser sind. Wir ziehen ferner AM_0 und BM_0, welche Sehnen von NN_0 und PP_0 in Q und R geschnitten werden mögen. Da Q und R die Mittelpunkte von AM_0 und BM_0 sind, so ist $QR{=}AB$ und $QR = \frac{1}{2} AB$. Es schneide ferner QR die Gerade MM_0 in U und $N_0 P_0$ dieselbe Gerade in V. Denken wir uns nun die Parabelgleichung auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen x-Axe $M_0 M$, und dessen y-Axe die Tangente in M ist, so haben N_0 und P_0 y-Koordinaten, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, also müssen sie dieselben x-Koordinaten haben, d. h. die Verbindungslinie $N_0 P_0$ mufs parallel AB sein. Nach No. 81 ist nun

$$\frac{N_0 V^2}{M_0 V} = 2q = \frac{AM^2}{M_0 M} \text{ oder } \frac{N_0 V^2}{AM^2} = \frac{M_0 V}{M_0 M},$$

aber

$$\frac{N_0 V^2}{AM^2} = \frac{1}{4}, \text{ also } M_0 V = \frac{1}{4} M_0 M,$$

also Dreieck

$$N_0 Q M_0 = \frac{1}{8} M_0 M A \text{ und}$$
$$N_0 M_0 A = \frac{1}{4} M_0 M A.$$

Ebenso dann

$$P_0 M_0 B = \frac{1}{4} M_0 M B, \text{ also}$$
$$N_0 M_0 A + P_0 M_0 B = \frac{1}{4} ABM_0.$$

Wenn man also in ein Parabelsegment ein Dreieck zeichnet, dessen dritte Ecke der Punkt ist, in welchem der zur Sehne gehörige Durchmesser die Parabel schneidet, dann über den Sehnen, die man durch Verbindung der Endpunkte der ersten Sehne mit diesem Eckpunkte erhält, die entsprechenden Dreiecke, so ist die Summe der letztern ein Viertel des ersten Dreiecks. Konstruiert man zu den neuen Sehnen immer wieder die entsprechenden Dreiecke, so werden alle diese schliefslich das Parabelsegment ausfüllen. Man erhält mithin für das Parabelsegment

$$S = ABM_0 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{4}{3} ABM_0$$

Zieht man noch in M_0 die Tangente, und in A und B Parallele zur Axe, so entsteht ein Paralellogramm $AA_0 B_0 B$, welches doppelt so grofs ist, als Dreieck ABM_0. Das Dreieck SAB ist rner, da $SM_0 = M_0 M$, ebenfalls doppelt so grofs, als Dreieck BM_0. Man kann daher auch sagen, ein Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ e s Parallelogramms, das von einer Sehne, der parallelen Tan-

gente und den Parallelen zur Axe durch die Endpunkte der Sehne gebildet ist, oder $\frac{2}{3}$ des Dreiecks, das durch Sehne und die Tangenten in den Endpunkten gebildet ist.

Bem. Dieser Satz ist bereits von Archimedes angegeben.

VI. Kapitel.

Die Ellipse.

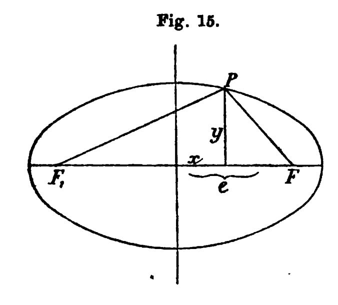
83. Erklärung. Der geometrische Ort des Punktes, für den die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist, heifst Ellipse. Die festen Punkte heifsen Brennpunkte, ihre Entfernung Exzentrizität, eine Gerade von einem Brennpunkte nach einem Punkte des Orts Leitstrahl oder Radius vector.

84. Aufgabe. **Die Gleichung der Ellipse aufzustellen, wenn die Verbindungslinie der festen Punkte die x-Axe, das Lot im Mittelpunkte die y-Axe ist.**

Aufl. Die festen Punkte seien F und F_1, (Fig. 15), die konstante Summe der Leitstrahlen sei $2a$, die Exzentrizität $2e$. Es ergiebt sich dann leicht aus der Bedingung:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a.$$

Fig. 15.



Setzt man der Kürze halber $x^2 + e^2 + y^2 = \lambda$, so ergiebt sich nacheinander:

$$\sqrt{\lambda + 2ex} + \sqrt{\lambda - 2ex} = 2a,$$

$$2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - 4e^2x^2} = 4a^2.$$

$$\sqrt{\lambda^2 - 4e^2x^2} = 2a^2 - \lambda,$$

$$\lambda^2 - 4e^2x^2 = 4a^4 - 4a^2\lambda + \lambda^2,$$

und zurücksubstituiert

$$a^2(x^2 + e^2 + y^2) - e^2x^2 = a^4,$$

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2),$$

oder endlich

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0.$$

Setzt man noch $a^2 - e^2 = b^2$, wo b reell ist, da $a > e$, so findet man die Hauptform der Ellipsengleichung:

$$2)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

85. Folgerungen.

a) Da in dieser Gleichung nur die Quadrate der veränderlichen Gröfsen x, y vorkommen, bleibt die Gleichung bestehen, wenn man $-x$ an Stelle von x, und $-y$ an Stelle von y setzt. Hieraus folgt, dafs die Kurve sowohl zur x-Axe, als zur y-Axe symmetrisch liegt, also aus vier kongruenten Teilen besteht.

b) Zieht man durch den Anfangspunkt eine Sehne, und sind die Koordinaten des einen Schnittpunktes $x_0\,y_0$, so sind die des andern $-x_0$ und $-y_0$, die Sehne wird also durch den Anfangspunkt halbiert. Der Anfangspunkt wird deshalb in Bezug auf die Ellipse als Mittelpunkt bezeichnet und die durch den Mittelpunkt gehende Sehne als Durchmesser.

c) Da $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ und $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ zusammen 1 betragen, so kann keine dieser Gröfsen den Werth 1 überschreiten, der Maximumswert von x ist mithin a, der Minimumswert $-a$, während die entsprechenden Werte von y sind: $+b$ und $-b$. Die Ellipse mufs daher innerhalb des Rechtecks liegen, dessen Seiten resp. $2a$ und $2b$ sind. Die Verbindungslinien der Mittelpunkte dieses Rechtecks, welche der Lage nach die Koordinatenaxen sind, werden als grofse und kleine Axe oder auch als Haupt- und Nebenaxe bezeichnet; die Endpunkte derselben heifsen Scheitel.

d) Wäre man von der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ausgegangen, so hätte man daraus bei der Annahme $a > b$ und gehöriger Zeichenbestimmung die ursprüngliche Gleichung ableiten können, nämlich

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Zunächst würde man mit Einführung von λ die Gleichung haben:

$$\sqrt{\lambda^2 - 4e^2x^2} = \pm\,(2a^2 - \lambda);$$
$$= \pm(2a^2 - e^2 - (x^2 + y^2)) = \pm(a^2 + b^2 - (x^2 + y^2)).$$

Es ist aber $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$, also mufs rechts das positive Zeichen genommen werden:

$$\sqrt{\lambda^2 - 4e^2x^2} = 2a^2 - \lambda,$$

also

$$2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - 4e^2x^2} = 4a^2,$$

also durch Wurzelziehen

$$\sqrt{\lambda + 2ex} + \sqrt{\lambda - 2ex} = \pm 2a.$$

Da die Wurzeln positiv genommen werden, so mufs auch rechts das positive Zeichen stehen. Man kann also sagen:

Ist die Gleichung einer Kurve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, so ist die Summe der Leitstrahlen eines Punktes derselben von zwei festen Punkten F und F_1, die auf der x-Axe liegen und vom Anfangspunkte um $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ entfernt sind, gleich $2a$.

86. Aus der gefundenen Gleichung der Ellipse leiten wir ab:

$$1)\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Die Gleichung eines Kreises, dessen Durchmesser die grosse Axe ist, heifst:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

woraus folgt:

$$2)\ y^2 = a^2 - x^2.$$

Bezeichnen wir nun die Ordinate, die den Punkten des Kreises für eine Abscisse x entspricht, mit Y, aber die Ordinate der Ellipse für dieselbe Abscisse x mit y, so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} Y^2,$$

also

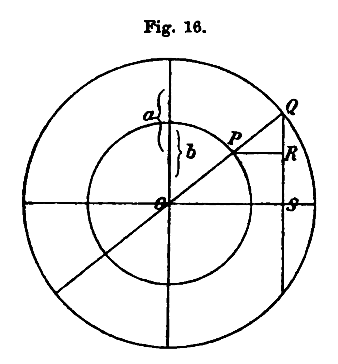
$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a} = \frac{2b}{2a},$$

wenn wir nur die Ordinaten mit gleichen Zeichen vergleichen. Es verhalten sich also die Ordinaten der Ellipse zu denen des Kreises, wie die kleine Axe zur grofsen.

Bem. Eine analoge Betrachtung läfst sich anstellen, wenn man die Ellipse mit einem Kreise vergleicht, dessen Durchmesser die kleine Axe ist.

87. Aus dem oben angeführten Satz ergiebt sich die Konstruktion von Ellipsenpunkten, wenn die Axen der Lage und Gröfse nach gegeben sind. Man schlage mit a und b vom Anfangspunkte die Kreise, ziehe einen Radius (Fig. 16) OPQ, wo P und Q die resp. Schnittpunkte mit den Kreisen sind. Fällt man nun von Q das Lot auf die Hauptaxe und zieht durch P die Parallele zur nämlichen Axe, so ist der Schnittpunkt R dieser Geraden ein Punkt der Ellipse. Ist nämlich QS das Lot auf die Hauptaxe, so ist

Fig. 16.



$$\frac{QS}{RS} = \frac{OQ}{OP} = \frac{a}{b},$$

oder wird QS mit Y und RS mit y bezeichnet, $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$.

88. Einen neuen Satz erhalten wir aus der Gleichung der Ellipse, wenn wir daran denken, dafs hier die Summe von 2 Quadraten 1 ist. Wir können also setzen

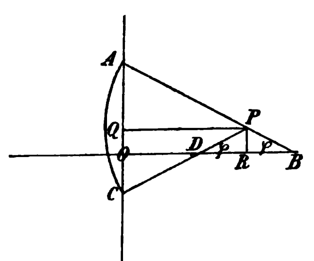
$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi.$$

Wir legen nun die Länge $AB = a + b$ (Fig. 17) in einen rechten Winkel, dessen Schenkel die Axen vorstellen. Es sei ferner auf AB ein Punkt P so gewählt, dafs $AP = a$, $PB = b$ ist und φ der Winkel, den die Gerade mit der negativen Richtung der x-Axe bildet. Fällt man dann auf OA und OB die Lote PQ und PR, so ist

$$OR = PQ = a\cos\varphi, \quad PR = b\sin\varphi.$$

Diese Gröfsen können wir aber als die x- und y-Koordinaten von P ansehen. Aus den Gleichungen ergiebt sich dann sofort $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Fig. 17.



Man kann ebenso CD (Fig. 17) mit der Länge $a - b$ in einen rechten Winkel des Koordinatensystems eintragen, und einen Punkt P auf der Verlängerung so annehmen, dafs $CP = a$, $DP = b$ ist.

Bezeichnen wir den Winkel, den die Gerade mit der x-Axe bildet, ebenfalls mit φ, so ergiebt sich wiederum für die x- und y-Koordinaten von P

$$x = a \cos \varphi, \; y = b \sin \varphi,$$

also

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Dies giebt den Satz: „Bewegt sich eine Gerade von bestimmter Länge innerhalb eines rechten Winkels, so beschreibt jeder Punkt der Geraden, sowohl innerhalb, wie aufserhalb der begrenzten Strecke eine Ellipse, deren Axen gleich den Entfernungen des Punktes von den Endpunkten der Geraden sind."

Bem. 1. Es beruht auf dieser Eigenschaft die Konstruktion eines Ellipsenzirkels.

Bem. 2. Dafs der Mittelpunkt der Geraden einen Kreis beschreibt, ergiebt sich schon aus einem Satz vom rechtwinkligen Dreieck.

89. Legt man durch den Mittelpunkt einer Ellipse einen Durchmesser HOG, der mit der x-Axe den Winkel φ bildet, so erhält man leicht für die Koordinaten des einen Endpunktes, wenn $2d$ die Länge des Durchmessers ist,

$$x = d \cos \varphi, \; y = d \sin \varphi.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der Ellipse ein, so giebt dies:

$$\frac{d^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \text{ oder}$$

$$1) \; \frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}.$$

Zieht man nun einen Durchmesser d^1 senkrecht dagegen, so erhält man für die Koordinaten $x^1 y^1$ des einen Endpunktes

$$x^1 = d^1 \cos (90^\circ + \varphi) = - d^1 \sin \varphi;$$
$$y^1 = d^1 \sin (90^\circ + \varphi) = d^1 \cos \varphi$$

und hieraus

$$2) \; \frac{1}{d'^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}.$$

Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

d. h. die Summe der reciproken Quadrate von zwei rechtwinkligen Durchmessern ist konstant.

90. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente einer Ellipse aufzustellen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Wir gehen von der Form der Geraden aus

$$\frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \lambda,$$

wo $x_1 y_1$ die Koordinaten des Berührungspunktes sind. Die sich daraus ergebenden Werte

$$x = x_1 + \lambda k, \; y = y_1 + \lambda l$$

in die Gleichung der Ellipse eingesetzt, führt zur Gleichung:

$$\lambda^2 \left\{ \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right\} + 2\lambda \left\{ \frac{kx_1}{a^2} + \frac{ly_1}{b^2} \right\} + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Da $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$ ist, so ist eine Wurzel der Gleichung 0, die andere Wurzel also:

$$\lambda = - \frac{2\left(\frac{kx_1}{a^2} + \frac{ly_1}{b^2}\right)}{\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}},$$

welche uns den zweiten Schnittpunkt liefert. Soll der zweite Punkt mit dem ersten zusammenfallen, so mufs dieser Wert auch 0 sein, also

$$\frac{kx_1}{a^2} + \frac{ly_1}{b^2} = 0,$$

oder

$$1) \quad \frac{l}{k} = -\left(\frac{x_1}{a^2} : \frac{y_1}{b^2}\right).$$

Die Gleichung der Tangente wird mithin

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{y_1}{b^2}\right)} = - \frac{y - y_1}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)},$$

oder

$$(x - x_1)\, b^2 x_1 + (y - y_1)\, a^2 y_1 = 0,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0,$$

oder endlich

$$2)\quad \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0.$$

91. Die Gleichung der Tangente abzuleiten, wenn die Richtung derselben gegeben ist.

Die Gleichung der gesuchten Geraden sei

$$1)\quad y = Ax + B,$$

wo B unbekannt ist. Diese Gleichung mit der Gleichung der Ellipse kombiniert, giebt

$$2)\quad x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{A^2}{b^2}\right) + \frac{2ABx}{b^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung mufs zwei gleiche Wurzeln haben, wenn die Gleichung (1) die einer Tangente sein soll. Daraus ergiebt sich

$$\left(\frac{B^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{A^2}{b^2}\right) - \frac{A^2 B^2}{b^4} = 0,$$

woraus

$$3)\quad B^2 = b^2 + a^2 A^2,\quad B = \pm\sqrt{b^2 + a^2 A^2}.$$

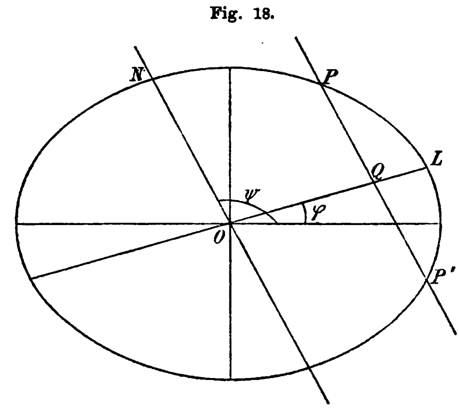
Da also B zwei Werte annimmt, so giebt es zwei Tangenten:

$$\text{a)}\quad y = Ax + \sqrt{b^2 + a^2 A^2},$$

$$\text{b)}\quad y = Ax - \sqrt{b^2 + a^2 A^2}.$$

92. Wir wollen nun in einer Ellipse eine willkürliche Sehne PP^1 (Fig. 18) ziehen, den Mittelpunkt Q derselben mit O verbinden, so dafs wir dadurch den Durchmesser OL erhalten, und noch den Durchmesser ON parallel PP^1 ziehen. Es seien dann OL und ON die Axen eines neuen Systems, welche mit der früheren x-Axe resp. die Winkel φ und ψ bilden. Ist nun die eigentliche positive Richtung der Sehne P^1P, und haben P und P^1 resp. die

Fig. 18.



Koordinaten $x\,y$ und $x^1\,y^1$, so ergiebt sich, wenn die neuen Koordinaten ξ und η heifsen,

$$1)\quad \begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi + \eta\cos\psi, & x^1 &= \xi\cos\varphi - \eta\cos\psi, \\ y &= \xi\sin\varphi + \eta\sin\psi, & y^1 &= \xi\sin\varphi - \eta\sin\psi. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung der Ellipse ein, so ergiebt sich

$$2)\quad \left(\frac{\xi\cos\varphi + \eta\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi\sin\varphi + \eta\sin\psi}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\xi\cos\varphi - \eta\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi\sin\varphi - \eta\sin\psi}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Addition und Subtraktion:

$$3)\quad \xi^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + \eta^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) = 1,$$

$$4)\quad 4\xi\eta\left\{\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}\right\} = 0.$$

Aus (4) folgt sofort:

$$5)\quad \operatorname{tg}\varphi\,.\,\operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}.$$

93. Folgerungen aus der letzten Gleichung:

Zunächst folgt aus der Gleichung (5) in No. 92, dafs einer der beiden Winkel stumpf sein mufs; liegt also die eine Axe im ersten Quadranten, dann die andere im zweiten. Es ist ferner:

$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \dfrac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\psi\,.\,\operatorname{tg}\varphi}$, oder, wenn wir, wie aus (5) folgt, setzen

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = -\frac{\dfrac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\varphi} + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = -\frac{b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\,(a^2 - b^2)}.$$

Ist also φ ein positiver spitzer Winkel, so ist $\psi - \varphi$ ein stumpfer Winkel; ist aber φ, den wir als kleineren Winkel uns denken wollen, ein negativer spitzer, so ist $\psi - \varphi$ ein spitzer

Winkel, d. h. die grofse Axe liegt innerhalb des spitzen Winkels der beiden Durchmesser, die kleine Axe innerhalb des stumpfen.

Ist $\psi - \varphi = 90^\circ$, so mufs entweder $\operatorname{tg}\varphi = 0$, also $\varphi = 0$ oder $a^2 - b^2 = 0$, also $a = b$ sein. Ist $a = b$, so geht die Ellipse in einen Kreis über; bei einer wirklichen Ellipse sind die beiden Durchmesser also nur senkrecht, wenn sie die Axen derselben sind.

Lassen wir nun ψ konstant sein, d. h. denken wir uns verschiedene, aber parallele Sehnen gezogen, so bleibt φ konstant, d. h. die Mittelpunkte liegen auf einem bestimmten Durchmesser. Nimmt ferner ψ den Wert φ an, d. h. ziehen wir die Sehnen dem letzten Durchmesser parallel, so nimmt φ den Wert ψ an, d. h. die Mittelpunkte dieser Sehnen liegen auf einem Durchmesser, welcher die Richtung hat, die vorher die Sehnen hatten. Insofern zwei Durchmesser in diesem Zusammenhange stehen, nennen wir sie konjugierte Durchmesser. Ein solches Paar sind auch die Axen.

Gehen wir bei den Sehnen zur äufsersten Grenze, so erhalten wir eine Tangente, die hienach parallel zu dem konjugierten Durchmesser sein mufs. In Worten sprechen wir diese Haupteigenschaften der konjugierten Durchmesser so aus: Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert der eine die Sehnen, die dem andern parallel sind, und die Tangente am Endpunkt des einen ist dem andern parallel.

94. Folgerung aus Gleichung (3) in No. 92.

Bezeichnen wir den Durchmesser OL mit a_1 (Fig. 18) den Durchmesser ON mit b_1, so ergiebt sich aus No. 89

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

$$\frac{1}{b_1^2} = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}.$$

Diese Werte in die Gleichung (3) No. 92 eingesetzt, giebt

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Es ist dies also die Gleichung der Ellipse, bezogen auf die konjugierten Durchmesser OL und ON als Axen. Sie hat dieselbe Form, wie die auf die Hauptaxen bezogene.

95. Es sind jetzt, wenn a_1 und b_1 zwei konjugierte Durchmesser sind, folgende zusammengehörige Gleichungen aufgestellt worden:

$$1)\ \frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2}+\frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}=0,$$

$$2)\ \frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}=\frac{1}{a_1^2},$$

$$3)\ \frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\frac{1}{b_1^2}.$$

Aus denselben läfst sich φ und ψ eliminieren. Es ist

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{1-\cos^2\varphi}{b^2}=\frac{1}{a_1^2},$$

also

$$\cos^2\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{b^2};$$

ebenso

$$\cos^2\psi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{b_1^2}-\frac{1}{b^2},$$

oder

$$\cos^2\varphi=\frac{a^2(a_1^2-b^2)}{a_1^2(a^2-b^2)},\quad \sin^2\varphi=\frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a_1^2(a^2-b^2)},$$

$$\cos^2\psi=\frac{a^2(b_1^2-b^2)}{b_1^2(a^2-b^2)},\quad \sin^2\psi=\frac{b^2(a^2-b_1^2)}{b_1^2(a^2-b^2)}.$$

Diese Werte in (1) eingesetzt, nachdem dieselbe quadriert ist, also in

$$\frac{\cos^2\varphi\,.\,\cos^2\psi}{a^4}=\frac{\sin^2\varphi\,.\,\sin^2\psi}{b^4},$$

ergiebt

$$(a_1^2-b^2)(b_1^2-b^2)=(a^2-a_1^2)(a^2-b_1^2),$$

oder

$$a_1^2b_1^2-b^2(a_1^2+b_1^2)+b^4=a^4-a^2(a_1^2+b_1^2)+a_1^2b_1^2,$$

$$a^4-b^4-(a^2-b^2)(a_1^2+b_1^2)=0,$$

oder durch a^2-b^2 dividiert, das nicht 0 ist,

$$4)\ a^2+b^2=a_1^2+b_1^2,$$

d. h. die Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser ist konstant.

96. Multipliziert man die Gleichungen (2) und (3) in No. 95, so ergiebt sich

$$1)\quad \frac{1}{a_1^2 b_1^2} = \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right).$$

Wendet man auf die rechte Seite die Formel an:

$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2$$

und benutzt noch die Gleichung (1) in No. 95, so folgt

$$\frac{1}{a_1^2 b_1^2} = \left(\frac{\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi\cos\psi}{ab}\right)^2 = \frac{\sin^2(\psi - \varphi)}{a^2 b^2},$$

oder setzt man $\pm(\psi - \varphi) = \omega$, so dafs ω ein positiver Winkel sein soll, so folgt

$$2)\quad \begin{aligned} a^2 b^2 &= a_1^2 b_1^2 \sin^2\omega \\ a\, b &= a_1\, b_1 \sin\omega. \end{aligned}$$

Dies giebt den Satz: Das von 2 konjugierten Halbdurchmessern und der Verbindungslinie der Endpunkte gebildete Dreieck ist konstant.

Oder auch: Beschreibt man um eine Ellipse ein Parallelogramm, dessen Seiten 2 konjugierten Durchmessern parallel sind, so ist der Inhalt konstant.

Bem. Weil $2a_1 b_1 = (a_1^2 + b_1^2) - (a_1 - b_1)^2 = a^2 + b^2 - (a_1 - b_1)^2$,

so ist
$$\sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2 - (a_1 - b_1)^2},$$

also nimmt $\sin\omega$, also ω, wenn wir den spitzen Winkel von konjugierten Durchmessern darunter verstehen, den kleinsten Wert an, wenn $a_1 = b_1$. Für diesen Fall ergiebt sich

$$a_1^2 + b_1^2 = 2a_1^2 = a^2 + b^2, \text{ also } a_1^2 = b_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Es mufs dann $\cos^2\varphi = \cos^2\psi$, $\sin^2\varphi = \sin^2\psi$ sein, also

$$\varphi = -\psi$$

da
$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ also } \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2},$$

also etwa $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}\psi = -\frac{b}{a}$.

Ferner
$$\sin 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin\omega.$$

97. Die Form der Gleichung einer Tangente, wenn 2 konjugierte Durchmesser die Koordinatenaxen sind, ist, wie aus der Ableitung zu ersehen, genau die alte, wobei nur die betreffenden Koeffizienten andere Bedeutung haben. Sind die Koordinaten der Berührungspunkte gegeben, so ist die Form eine identische. Wir erhalten also, wenn die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0,$$

als Gleichung der Tangente

$$\frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Setzen wir $y_1 = 0$, so ist die Gleichung der Tangente

$$\frac{xx_1}{a_1^2} - 1 = 0, \text{ oder da } x_1 = \pm a_1 \text{ ist,}$$

$$x = \pm a_1,$$

d. h. die Gleichung der Tangente am Endpunkte eines Durchmessers ist dem konjugierten Durchmesser parallel, welches Resultat schon früher abgeleitet ist.

Es seien nun OL und OM (Taf. I, Fig. 3) 2 konjugierte Halbdurchmesser mit den Längen a_1 und b_1. Wir ziehen eine Sehne PQ parallel dem Durchmesser OM, so dafs PQ durch OL halbiert wird. Sind also $x_1 y_1$ die Koordinaten von P, so sind x_1 und $-y_1$ die von Q. Die Gleichungen der Tangenten in P und Q also für das Koordinatensystem OL und OM

$$\frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Aus diesen ergiebt sich für die Koordinaten des Schnittpunktes

$$x_0 = \frac{a_1^2}{x_1}, \quad y_0 = 0,$$

d. h. die Tangenten schneiden sich auf der x-Axe nämlich auf dem Durchmesser, der dem parallel zur Sehne gelegenen konjugiert ist.

Noch sei bemerkt, dafs die Gleichung $x_0 = \frac{a_1^2}{x_1}$ sagt, der Durchmesser wird durch die Sehne und den Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten harmonisch geteilt.

98. Folgerungen. Es sei QR ein Durchmesser, dessen Endpunkte mit einem beliebigen Punkte P der Ellipse (Taf. I, Fig. 3)

verbunden werden. Zieht man nun $OX_1 \parallel PR$, so wird PQ durch X_1 halbiert, ebenso halbiert OY_1, wenn es parallel PQ gezogen wird, PR, also sind OX_1 und OY_1 konjugierte Durchmesser, und da PQ und PR diesen Durchmessern parallel sind, so ergiebt sich der Satz: Verbindet man einen beliebigen Punkt einer Ellipse mit den Endpunkten eines Durchmessers, so sind die erhaltenen Sehnen 2 konjugierten Durchmessern parallel.

Ferner ergiebt sich noch aus der letzten Betrachtung der No. 97: Verbindet man einen Punkt aufserhalb mit dem Mittelpunkte der zum Punkte gehörigen Berührungssehne, so geht diese Verbindungslinie durch den Mittelpunkt der Ellipse.

Zeichnet man um eine Ellipse ein Parallelogramm $Y^0 X^0 V^0 U^0$, deren Berührungspunkte nach der Reihe $PQSR$ seien (Taf. I, Fig. 3), so sind die Verbindungslinien PS und QR Durchmesser, also

$$PQ \parallel RS \text{ und } PR \parallel QS.$$

Verbindet man nun O mit X_1 und X^1, d. h. den Mittelpunkten der Sehnen PQ und RS, so bilden die Verbindungslinien eine Gerade, welche auch durch die Eckpunkte X_0 und Y_0 gehen muss, ebenso geht die Verbindungslinie $Y_1 Y_1{}^1$ durch O, Y_0 und V_0, wo Y_1 und $Y_1{}^1$ die Mittelpunkte von PR und QS sind. Es ist endlich nach dem obigen

$$Y_1 Y_1{}^1 \parallel PQ \parallel RS \text{ und } PR \parallel QS \parallel X_1 X_1{}^1;$$

dieses giebt den Satz:

Zeichnet man um eine Ellipse ein Parallelogramm, so sind die Diagonalen ein Paar konjugierte Durchmesser der Lage nach.

99. Die Normale.

Die Gleichung derselben ergiebt sich leicht aus den Bedingungen. Sie wird

$$\frac{x - x_1}{x_1} a^2 - \frac{y - y_1}{y_1} \cdot b^2 = 0$$

oder 1) $\frac{x}{x_1} a^2 - \frac{y}{y_1} b^2 - e^2 = 0$, wo $e^2 = a^2 - b^2$ ist.

Setzen wir hier $y = 0$, so erhalten wir die Länge ON (Taf. I, Fig. 4), d. h. die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte, in welchem die Normale die x-Axe schneidet. Es ergiebt sich

$$2)\ ON = x_n = \frac{e^2 x_1}{a^2}.$$

Ist nun TT_1 das Lot vom Fufspunkte T der Normale auf die x-Axe, so folgt

$$3)\quad NT^1 = x_1 - \frac{e^2 x_1}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} x_1,$$

d. h. die Subnormale ist proportional der Abscisse.

NT selbst bezeichnet man als die Länge der Normale, es ergiebt sich

$$NT^2 = y_1^2 + \frac{b^4}{a^4} x_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) + \frac{b^4}{a^4} x_1^2,$$

$$4)\quad NT^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2}\right).$$

Bezeichnet man noch OT mit b_1 und die Länge des zu OT gehörigen konjugierten Durchmessers mit a_1, so ist nach No. 95

$$a_1^2 = a^2 + b^2 - b_1^2 = a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2,$$

$$= a^2 + b^2 - x_1^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) = a^2 - x_1^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right),$$

also

$$5)\quad a_1^2 = a^2 - \frac{e^2}{a^2} x_1^2,$$

und in Verbindung mit (4)

$$6)\quad NT^2 = \frac{b^2}{a^2} a_1^2, \text{ also } NT = \frac{b}{a} . a_1.$$

Verlängern wir TN bis zur kleinen Axe in N^1, so ist

$$ON^1 = y_n = -\frac{e^2 y_1}{b^2}$$

also

$$TN^{1\,2} = (y_n - y_1)^2 + x_1^2 = \frac{a^4 y_1^2}{b^4} + x_1^2 = \frac{a^4}{b^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) + x_1^2$$

$$= \frac{a^4}{b^2} - \frac{e^2}{b^2} x_1^2 \text{ oder}$$

$$TN^{1\,2} = \frac{a^2}{b^2}\left(a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2}\right) = \frac{a^2}{b^2} . a_1^2.$$

$$7)\quad TN^1 = \frac{aa^1}{b},$$

woraus noch folgt

$$8)\quad \frac{TN}{TN^1} = \frac{b^2}{a^2}.$$

100. Konstruktion der Axen einer Ellipse, wenn zwei konjugierte Durchmesser der Länge und Lage nach gegeben sind.

Wir benutzen die vorige Figur; es seien also OS und OT zwei konjugierte Halbdurchmesser mit den Längen a_1 und b_1. Winkel $O(ST) = \omega$. Die Normale TN steht senkrecht zum Durchmesser OS, macht man daher $TU = TV = a_1$, so dafs U aufserhalb der Ellipse liegt so ist $T(OU) = 90^0 + \omega$ und $T(OV) = 90^0 - \omega$, also

$$OU^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 + \omega) = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 \sin\omega$$
$$= (a + b)^2,$$
$$OV^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 - \omega) = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \sin\omega$$
$$= (a - b)^2,$$

also $OU = a + b$, $OV = a - b$.

Ferner ist

$$NU = a_1 \frac{b}{a} + a_1$$
$$NV = a_1 - a_1 \frac{b}{a},$$

also

$$\frac{NU}{NV} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{OU}{OV},$$

daher halbiert ON den Winkel $O(VU)$.

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Hauptaxen. Es seien OS und OT zwei konjugierte Halbdurchmesser, die einen spitzen Winkel einschliefsen. Man fälle das Lot TH von T auf OS, trage von T nach beiden Richtungen die Länge $OS = a_1$ ab, und erhält so die Punkte U und V, ziehe OU und OV, halbiere den dadurch bestimmten Winkel, trage auf derselben nach den entgegengesetzten Richtungen die halbe Summe von OU und OV ab, und auf der äufseren Halbierungslinie die halbe Differenz, dann sind die Axen der Lage und Gröfse nach konstruiert.

101. Aus demselben Dreieck ergiebt sich noch leicht die Länge des Lotes OH von O auf die Normale. Es ist

$$OH^2 = (a + b)^2 - \frac{(a_1^2 + ab)^2}{a_1^2}$$

$$1)\quad OH^2 = \frac{(a + a_1)(a - a_1)(a_1 + b)(a_1 - b)}{a_1^2}.$$

Setzt man ferner $a_1^2 = a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2}$ aus (5) in No. 99, so erhält man $OH = p$ gesetzt:

$$2)\quad e^4 x_1^4 - a^2 e^2 x_1^2 (e^2 + p^2) + a^6 p^2 = 0,$$

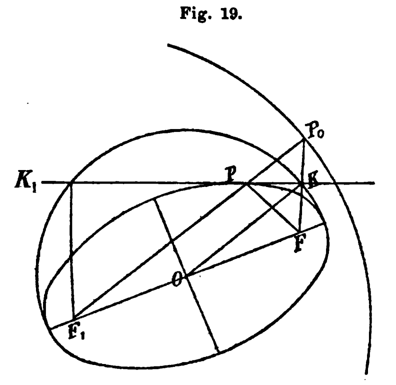
woraus folgt, dafs jedem Abstande p je zwei Werte von x_1 entsprechen. Man bezeichnet solche Punkte, für welche die Normalen denselben Abstand vom Mittelpunkte haben und die in demselben Quadranten liegen, als associierte Punkte. Will man p durch x_1 ausdrücken, so ergiebt sich

$$3)\quad p = \frac{e^2 x_1}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - x_1^2}{a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2}}}.$$

Die Brennpunkte.

102. Wir bezeichnen die Brennpunkte einer Ellipse mit F und F_1, (Fig. 19) so dafs die x-Koordinaten von F und F_1 resp. $+e$ und $-e$ sind. Für einen Punkt P auf der Ellipse dessen Koordinaten wir mit $x_1\, y_1$ bezeichnen, ist dann:

Fig. 19.



$$FP = r = \sqrt{(x_1 - e)^2 + y_1^2},$$

$$F_1 P = r_1 = \sqrt{(x_1 + e)^2 + y_1^2}.$$

Hieraus folgt:

$$r_1^2 - r^2 = 4 e x_1.$$

Da aber

$$r_1 + r = 2a,\ \text{so ist}$$

$$r_1 - r = \frac{2 e x_1}{a},\ \text{also}$$

$$r_1 = a + \frac{e x_1}{a},\quad r = a - \frac{e x_1}{a},\ \text{und}$$

$$1)\quad r r_1 = a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2} = a_1^2,$$

wo a_1 der zum Punkte P gehörige konjugierte Halbdurchmesser ist, also: Das Produkt von zwei Leitstrahlen desselben Punktes ist gleich dem Quadrat des zum Punkte gehörigen konjugierten Durchmessers.

103. Für die Abstände p und p_1 der Brennpunkte von der Tangente an einem Punkte P erhalten wir nach bekannter Regel leicht

$$1)\ p = \frac{1 - \frac{ex_1}{a^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}},\quad p_1 = \frac{1 + \frac{ex_1}{a^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Nun ist

$$\frac{y_1^2}{b^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2},\ \text{also}$$

$$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{1}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2} - \frac{e^2 x_1^2}{a^4 b^2} = \frac{1}{a^2 b^2}\left(a^2 - \frac{e^2 x_1^2}{a^2}\right) = \frac{a_1^2}{a^2 b^2},$$

also

$$2)\ p = \frac{b\left(a - \frac{ex_1}{a}\right)}{a_1} = \frac{br}{\sqrt{rr_1}},\quad p_1 = \frac{br_1}{\sqrt{rr_1}}$$

oder auch

$$3)\ p = b\sqrt{\frac{r}{r_1}},\ p_1 = b\sqrt{\frac{r_1}{r}}$$

woraus

$$4)\ \frac{p}{p_1} = \frac{r}{r_1},$$

$$5)\ pp_1 = b^2,$$

d. h. die Lote von den Brennpunkten auf eine Tangente verhalten sich wie die Leitstrahlen nach dem Berührungspunkte und das Produkt der Lote ist gleich dem Quadrat der kleinen Axe.

104. Folgerungen.

Bezeichnen wir die Fufspunkte der Lote von F und F_1 auf eine Tangente mit K und K_1 (Fig. 19) so ergiebt sich aus Gleichung (4) in No. 103, dafs Dreieck $FKP \sim F_1K_1P$, und daraus, dafs die Winkel, welche die Leitstrahlen mit den entgegengesetzten Richtungen der Tangente bilden, einander gleich sind. Die Normale halbiert also den Winkel der beiden Leitstrahlen,

während die Tangente den Aufsenwinkel halbiert. Hienach vereinigen sich Lichtstrahlen, die von dem einen Brennpunkte ausgehen, nach der Reflexion an der Ellipse im andern.

Verlängert man ferner das vom Brennpunkte auf eine Tangente gefällte Lot FK um sich selbst bis P_0, so ist $F_1 P_0 = 2a$, also liegt P_0 auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der andere Brennpunkt und dessen Radius die grofse Axe ist. Man nennt diesen Kreis den zum Brennpunkte F gehörigen Leitkreis.

Schlägt man von P mit PF den Kreis, so wird derselbe den Leitkreis berühren und zwar von innen. Hienach stellt sich die Ellipse als der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises dar, der durch einen Punkt innerhalb eines festen Kreises geht und diesen Kreis berührt.

Es ist ferner $OK = \frac{1}{2} F_1 P_0 = a$.

Dies giebt den Satz: Die Fufspunkte der Lote von einem Brennpunkt auf die Tangenten der Ellipse liegen auf dem Kreise, dessen Durchmesser die grofse Axe ist.

Schlägt man endlich über PF als Durchmesser den Kreis, so wird derselbe den ebengenannten Kreis berühren.

Verbindet man nämlich O mit dem Mittelpunkte von PF, so geht die Verbindungslinie durch K; da noch $K(PF)$ ein rechter Winkel ist, so liegt K auf dem Kreise über PF und über der grofsen Axe der Ellipse, somit haben beide Kreise einen gemeinschaftlichen Punkt auf der Centrale, berühren sich also.

105. Es mögen sich jetzt zwei Tangenten in den Punkten P und P_1 in S schneiden. Fällt man nun die Lote FK und $F_1 K_1$ auf die beiden Tangenten und verlängert dieselben um sich selbst bis G resp. G_1 (Taf. I, Fig. 5), so liegen $FP_1 G_1$ und $F_1 PG$ in einer Geraden.

Da nun $SF = SG$, $SF_1 = SG_1$, $F_1 G = FG_1 = 2a$, so sind die Dreiecke $SF_1 G$ und SFG_1 kongruent, also $F_1(PS) = G_1(P_1 S) = F_1(SP_1)$, also wird der Winkel $F_1(PP_1)$ durch $F_1 S$ halbiert. Wir haben also den Satz: Zieht man an eine Ellipse zwei Tangenten, und verbindet einen Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte der Tangenten, so halbiert die letzte Gerade den Winkel der beiden ersten.

Geht also die Berührungssehne durch den Brennpunkt, so mufs das im Brennpunkt zur Sehne errichtete Lot durch den Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten der Sehne gehen.

Es ist endlich noch $S(P_1 F_1), = S(FP)$, wie aus kongruenten Dreiecken folgt, also: Verbindet man den Schnittpunkt von zwei

Tangenten mit den Brennpunkten, so sind die Winkel, den die letzten Linien resp. mit den verschiedenen Tangenten bilden, einander gleich.

106. Ist die Gleichung einer Tangente

$$1)\quad y = Ax + \sqrt{b^2 + a^2 A^2},$$

so ist die Gleichung einer darauf senkrecht stehenden Tangente

$$2)\quad y = -\frac{x}{A} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{A^2}}.$$

Wir leiten daraus ab

$$(y - Ax)^2 = b^2 + a^2 A^2,$$
$$(Ay + x)^2 = A^2 b^2 + a^2,$$

also addiert:

$$y^2 (1 + A^2) + x^2 (1 + A^2) = b^2 (1 + A^2) + a^2 (1 + A^2)$$

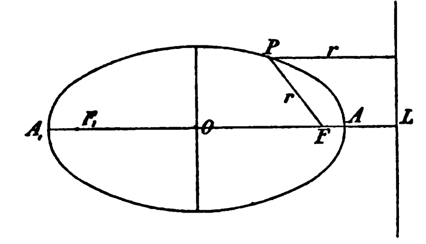
oder

$$3)\quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. schneiden sich zwei Tangenten einer Ellipse unter einem rechten Winkel, so liegt der Schnittpunkt auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Ellipse und dessen Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$, d. h. die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Halbaxen ist.

107. Wir bestimmen jetzt zu den Endpunkten der grofsen Axe $A_1 A$ und dem Brennpunkte F (Fig. 20) den vierten harmonischen Punkt L, und errichten hier das Lot zur Axe. Dieses Lot bezeichnen wir als die zum Brennpunkte F gehörige Leitlinie.

Fig. 20.



Sind nun die Koordinaten eines Punktes P der Ellipse $x_1 y_1$, so ist der Abstand desselben von der Leitlinie

$$p = \frac{a^2}{e} - x_1,$$

denn der Abstand des Punktes L von O ist $\frac{a^2}{e}$. Nun ist

$$\frac{a^2}{e} - x_1 = \frac{a}{e}\left(a - \frac{ex_1}{a}\right) = \frac{a}{e} \cdot r, \text{ also } p = \frac{a}{e} \cdot r,$$

wo r den Abstand des Punktes P vom Brennpunkt (No. 102) bedeutet; also ergiebt sich

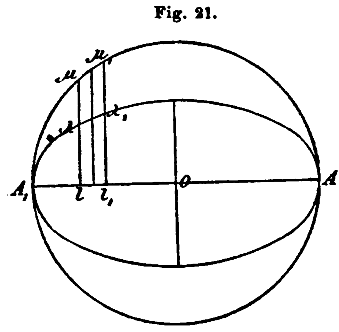
$$\frac{p}{r} = \frac{a}{e},$$

d. h. das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes der Ellipse von Leitlinie und Brennpunkt ist konstant, nämlich gleich dem Verhältnis der grofsen Axe zur Exzentrizität.

108. Quadratur der Ellipse.

Wir schlagen über der grofsen Axe $A_1 A$ als Durchmesser den Kreis (Fig. 21), und errichten die Lote $l\lambda\mu$ und $l_1\lambda_1\mu_1$, wo λ und λ_1 die Schnittpunkte der Lote mit der Ellipse, μ und μ_1 die Schnittpunkte mit dem Kreise sind. Nach No. 86 ist

Fig. 21.



$$l\lambda = \frac{b}{a} \cdot l\mu,$$

$$l_1\lambda_1 = \frac{b}{a} \cdot l_1\mu_1,$$

also

$$\frac{l\lambda + l_1\lambda_1}{2} = \frac{b}{a} \frac{l\mu + l_1\mu_1}{2}.$$

Da nun Trapez

$$ll_1\lambda_1\lambda = \frac{l\lambda + l_1\lambda_1}{2} \cdot ll_1,$$

$$ll_1\mu_1\mu = \frac{l\mu + l_1\mu_1}{2} \cdot ll_1,$$

so ist

$$ll_1\lambda_1\lambda = \frac{b}{a} \cdot ll_1\mu_1\mu.$$

Denken wir uns nun eine Menge solcher Lote gezogen, so werden die entsprechenden Trapeze immer in dem Verhältnis $\frac{b}{a}$ bleiben, also auch die Summen derselben. Indem wir nun die Lote immer enger aneinander nehmen, nähern wir uns in der

Summe der Trapeze einerseits der Ellipse, andererseits dem Kreise, also verhält sich der Inhalt der Ellipse zum Inhalt des Kreises wie $b : a$. Da endlich der Inhalt des Kreises πa^2 ist, so ist der Inhalt der Ellipse

$$J = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab.$$

VII. Kapitel.

Die Hyperbel.

109. Erklärung. Der geometrische Ort des Punktes, für welchen die Differenz der Entfernungen von 2 festen Punkten eine bestimmte Länge ist, heifst Hyperbel. Die festen Punkte werden als Brennpunkte bezeichnet, die Entfernung der Brennpunkte heifst Exzentrizität, die Entfernung eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkt heifst Leitstrahl oder Radius vector, die konstante Differenz ist die Länge der sogenannten Hauptaxe.

110. Die Gleichung der Hyperbel abzuleiten, wenn die Verbindungslinie der Brennpunkte die x-Axe, das im Mittelpunkte der Verbindungslinie errichtete Lot die y-Axe ist.

Aufl. Die Brennpunkte bezeichnen wir wieder mit F und F_1 (Taf. II, Fig. 6), ihre Entfernung ebenso mit $2e$, die konstante Differenz mit $2a$. Es ergiebt sich leicht:

$$1) \quad \sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Zunächst sei bemerkt, dafs, wenn diese Gleichung rational gemacht wird, es gleichgültig ist, ob rechts das positive oder das negative Zeichen steht. Der rational gemachten Gleichung entspricht daher eine Kurve, in der beides stattfindet, d. h. für einige Punkte ist die Entfernung von F gröfser, für andre die von F_1. Wenn man nun in der Mitte von FF_1 das Lot errichtet, so ist für alle Punkte des einen Ebenenteils die Entfernung von F gröfser, für alle Punkte des andern die von F_1. Es sind daher die Punkte, für welche in der Gleichung (1) das positive Zeichen gilt, von denen getrennt, für welche das negative Zeichen zu nehmen ist. Die Kurve mufs daher getrennte Zweige haben.

Die Rechnung, um die Gleichung (1) rational zu machen, ist identisch mit der in No. 84. Wir erhalten hier

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

oder, wenn wir $e^2 - a^2 = b^2$ setzen, da $e > a$ sein mufs, so finden wir

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Man bemerkt sofort, dafs sich diese Gleichung von der Ellipsengleichung nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes unterscheidet.

111. Aus der Gleichung ist ersichtlich, dafs die Kurve aus 4 Quadranten besteht, da man sowohl $-x$ mit x, als auch $-y$ mit y vertauschen kann. Der Einfachheit halber können wir daher, um die Natur der Kurve ungefähr zu erkennen, uns auf die positiven Werte beschränken. Indem wir nun die Gleichung derselben auf die Form bringen

$$1) \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

erkennen wir, dafs es keinen Punkt der Kurve giebt, für den die x-Koordinate kleiner als a ist, da in diesem Falle $\frac{y}{x}$ imaginär werden würde. Wenn man also auf der x-Axe vom Anfangspunkte die Länge a abschneidet, und zwar nach beiden Seiten, in den erhaltenen Punkten die Lote zur Axe errichtet, so liegt kein Punkt der Kurve innerhalb des so erhaltenen Streifens.

Für $x = \pm a$ ist $y = 0$, also in diesen Punkten schneidet die Kurve die x-Axe. Wir wollen diese Punkte (Taf. II, Fig. 6) A und A_1 nennen. In dem Punkte A errichten wir das Lot AD, und machen

$$AD = b = \sqrt{e^2 - a^2}; \text{ dann ist}$$

$$\operatorname{tg} O\,(AD) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Die Gleichung der Geraden AD ist also

$$2) \quad y = \frac{b}{a} x.$$

Ist P ein Punkt der Kurve, PQ das Lot auf die x-Axe, so ist

$$\operatorname{tg} O\,(QP) = \frac{y}{x}.$$

Nun ist, wie aus Gleichung (1) hervorgeht, $\frac{y}{x} < \frac{b}{a}$, je grösser aber x, desto mehr nähert sich $\frac{y}{x}$ oder $\operatorname{tg} O\,(PQ)$ dem Werte $\frac{b}{a}$, es nähert sich also OP, welche Linie wir als Durchmesser oder auch als Centralvector bezeichnen wollen, der Richtung OD, woraus wir schliessen, dass die Punkte der Hyperbel im weitern Verlaufe sich der Geraden AD nähern. Um dies noch genauer einzusehen, fällen wir von einem Punkte P der Hyperbel das Lot PQ, und nennen P_1 den Schnittpunkt dieses Lotes mit der Geraden OD. Bezeichnen wir nun die Ordinate P_1Q mit Y, so ist

$$\frac{Y}{x} = \frac{b}{a}, \text{ dagegen}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2, \; y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, \text{ also}$$

$$Y^2 - y^2 = b^2, \text{ also (3) } Y - y = \frac{b^2}{Y+y}.$$

Da nun, je grösser x, desto grösser auch y und Y, so wird y und Y über jede angebbare Grenze hinauswachsen, also wird dann $Y - y$ sich der Null nähern, d. h. also die Hyperbel wird sich der genannten Geraden OD nähern. Man bezeichnet diese Gerade als eine Asymptote der Hyperbel. Als Asymptoten werden überhaupt die Geraden bezeichnet, denen sich Kurvenzweige in der Unendlichkeit nähern.

Wir haben die Gerade, deren Gleichung ist $y = \frac{b}{a}x$ oder

$$ay - bx = 0$$

als Asymptote der Hyperbel gefunden. Es lässt sich ebenso einsehen, dass auch $ay + bx = 0$ eine Asymptote ist. Es ergiebt sich hienach, dass die Hyperbel innerhalb der Scheitelwinkel liegt, welche durch die Asymptoten gebildet werden. Die beiden Zweige sind also wie daraus ersichtlich getrennt, indessen hat

man doch die analytische Vorstellung, dafs die beiden Zweige in der Unendlichkeit zusammenhängen, wie man ja auch die Gerade analytisch als eine Linie ansehen kann, deren Enden in der Unendlichkeit zusammenhängen.

Bem. Ist $a = b$, so wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt. Die Axen bilden dann mit den Asymptoten Winkel von 45°, die Asymptoten stehen also in diesem Falle senkrecht aufeinander. Ebenso, wie der Kreis als ein spezieller Fall der Ellipse erscheint, so die gleichzeitige Hyperbel als spezieller Fall der Hyperbel.

112. Hülfssatz aus der Algebra.

Ist eine quadratische Gleichung gegeben:

$$Lz^2 + 2Mz + N = 0,$$

so sind die Wurzeln

$$z_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L} = \frac{N}{-M - \sqrt{M^2 - LN}}$$

$$z_2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L} = \frac{N}{-M + \sqrt{M^2 - LN}}.$$

Setzen wir hier $L = 0$, so erhalten wir

$$z_1 = -\frac{N}{2M}, \quad z_1 = \frac{N}{0} = \infty.$$

Hätten wir in der gegebenen Gleichung sofort $L = 0$ gesetzt, so hätten wir eine Gleichung des ersten Grades erhalten mit der einen Wurzel $z_1 = -\frac{N}{2N}$, die andere wäre verschwunden. Wir können daher eine Gleichung des ersten Grades als eine des zweiten Grades mit einer unendlich grofsen Wurzel ansehen. Da dies Resultat paradox klingt, soll es noch auf einem andern Wege abgeleitet werden. Eine Gleichung

$$Nu^2 + 2Mu + L = 0$$

hat 2 Wurzeln, auch wenn $L = 0$ ist, nämlich

$$u_1 = -\frac{2M}{N}, \quad u_2 = 0.$$

Setzen wir nun $u = \frac{1}{z}$, so geht jene Gleichung über in

$Lz^2 + 2Mz + N = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung müssen nach der Substitution sein:

$$z_1 = -\frac{N}{2M},\ z_2 = \frac{1}{0} = \infty.$$

Würde man auch $M = 0$ setzen, so kann man ebenso den Schlufs ziehen, dafs auch die andere Wurzel ∞ wird, in Übereinstimmung damit, dafs die Gleichung $Nu^2 = 0$ zwei Wurzeln hat, die 0 sind. Somit hat die symbolische Gleichung $N = 0$, oder durch N dividiert $1 = 0$ die Bedeutung, dafs deren Wurzeln sämtlich unendlich sind.

113. Wenn wir die Gleichung einer Hyperbel mit der einer geraden Linie kombinieren, also

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

mit

$$y = Ax + B,$$

so erhalten wir durch Elimination von y:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(Ax + B)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}\right) - \frac{2ABx}{b^2} - \frac{B^2 + b^2}{b^2} = 0.$$

Wird hier $\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{b^2} = 0$ gesetzt oder

$$b^2 = a^2A^2,\ A = \pm\frac{b}{a},$$

so erhalten wir eine Gerade, welche einer Asymptote parallel ist; da dann eine Wurzel ∞ ist, so ergiebt sich also, dafs eine Gerade, welche einer Asymptote parallel ist, einen Schnittpunkt in der Unendlichkeit hat.

Setzen wir noch $B = 0$, so erhalten wir die Gleichung der Asymptote, dann wird die Gleichung für die Koordinaten der Schnittpunkte $1 = 0$, d. h. beide Schnittpunkte fallen in die Unendlichkeit. Das Zusammenfallen von zwei Schnittpunkten ist aber die Bedingung für eine Tangente, daher müssen wir die Asymptoten als Tangenten ansehen, deren Berührungspunkte in der Unendlichkeit liegen.

114. Gleichung der Tangente.

Die Übereinstimmung der algebraischen Form der Gleichung der Hyperbel mit der der Ellipse erlaubt uns die Gleichung sofort hinzuschreiben. Sind die Koordinaten des Berührungspunktes x_1 und y_1, so ergiebt sich

$$1)\quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

Ist aber die Tangente des Winkels gegeben, den die Tangente mit der x-Axe bildet, so erhalten wir

$$2)\quad y = Ax \pm \sqrt{a^2 A^2 - b^2}.$$

Aus (2) ergiebt sich, dafs $y = \pm \frac{b}{a} x$ als Gleichung einer Tangente angesehen werden mufs. Dasselbe ergiebt sich aus (1). Wir schreiben sie:

$$3)\quad \frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{x_1} = 0.$$

Ist nun $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$, aber $\frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a}$ so geht (3) über in

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\frac{b}{a} = 0 \text{ oder } bx - ay = 0,$$

so dafs die Gleichungen der Asymptoten als Gleichungen von Tangenten erscheinen.

115. Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ oder $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ können wir als die Gleichung einer Kurve ansehen. Da dieselbe erfüllt wird für die Punkte der beiden Geraden $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, d. h. für die Punkte der Asymptoten, so können wir sagen, es ist die Gleichung der beiden Asymptoten.

Wir wollen nun die Gleichung einer Geraden mit der Gleichung der Asymptoten und dann mit der Gleichung der Hyperbel kombinieren. Die Koordinaten der Schnittpunkte wollen wir resp. mit $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$ und $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ bezeichnen.

Es ergeben sich zunächst für die x-Koordinaten die Gleichungen

$$1)\ \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{(A\xi + B)^2}{b^2} = 0 \text{ oder } \xi^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}\right) - \frac{2AB\xi}{b^2} - \frac{B^2}{b^2} = 0,$$

$$2)\ \frac{u^2}{a^2} - \frac{(Au + B)^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ oder } u^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}\right) - \frac{2ABu}{b^2} - \left(\frac{B^2}{b^2} + 1\right) = 0.$$

Aus denselben folgt

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{\frac{AB}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}} = \frac{AB\,a^2}{b^2 - a^2 A^2},$$

$$\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{AB\,a^2}{b^2 - a^2 A^2},$$

also

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Ebenso wird sich ergeben, was wohl ohne Rechnung ersichtlich,

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes des Stücks der Geraden zwischen den Asymptoten sind denen des Mittelpunktes der Sehne der Hyperbel gleich. Wir sprechen daher folgenden Satz aus:

Wenn man eine beliebige Transversale durch Asymptoten und Hyperbel legt, so sind die Stücke zwischen Asymptote und Hyperbel an beiden Enden gleich grofs (Taf. II, Fig. 7).

116. Folgerungen.

Lassen wir die Sekante in eine Tangente übergehen, so folgt, dafs der Berührungspunkt einer Tangente immer der Mittelpunkt des Stücks zwischen den Asymptoten ist. Es ergiebt sich hieraus leicht die Konstruktion einer Tangente an einem Punkte der Hyperbel, wenn die Asymptoten gegeben sind. Es ergiebt sich ferner aus dem Satz No. 115 leicht die Konstruktion beliebig vieler Hyperbelpunkte wenn die Asymptoten und ein Punkt gegeben sind. Wir sehen zugleich, dafs die Asymptoten und ein Punkt die Hyperbel bestimmen.

117. Fällt man von einem Hyperbelpunkte H (Taf. II, Fig. 7) die Lote HN und HN_1 auf die Asymptoten, so ist nach No. 22

$$1)\ HN = \pm \frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},\quad HN_1 = \pm \frac{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},$$

also

$$2)\ HN \,.\, HN_1 = \frac{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

also konstant.

Zieht man ferner HL und HL_1 parallel den Asymptoten, und nennt ω den Asymptotenwinkel, so ist

$$HN = HL \sin \omega,\quad HN_1 = HL_1 \sin \omega,$$

also

$$HN \,.\, HN_1 = HL \,.\, HL_1 \sin^2 \omega.$$

Ferner

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{b}{a},\quad \sin \omega = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{2\,ab}{a^2 + b^2}.$$

Da nun

$$HN \cdot HN_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

so ist

$$HL \cdot HL_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{4\, a^2 b^2} = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Sehen wir die Asymptoten als Koordinatenaxen an, so können wir $HL = \xi$, $HL_1 = \eta$ setzen, und bekommen die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf diese Axen

$$\xi\, \eta = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Zieht man ferner in H die Tangente, indem man durch H diejenige Gerade zieht, für welche das innerhalb der Asymptoten liegende Stück durch H halbiert wird, so ist das dadurch abge-

schnittene Dreieck doppelt so grofs als das Parallelogramm $OLHL_1$, welches den Wert $HL \cdot HL_1 \cdot \sin\omega$ hat.

Da nun $HL \, . \, HL_1 \sin\omega = \frac{a^2+b^2}{4} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{ab}{2}$ ist, so hat das abgeschnittene Dreieck den Wert ab. Dies giebt den Satz:

Jede Tangente einer Hyperbel schneidet von den Asymptoten ein Dreieck ab, dessen Inhalt gleich dem Rechteck aus den Halbaxen ist.

118. Eine durch den Mittelpunkt gelegte Gerade bezeichnen wir als Durchmesser, gleichgültig ob die Hyperbel geschnitten wird oder nicht; wir wollen die Fälle nur insofern unterscheiden, als wir sie im ersten Falle Hauptdurchmesser, im zweiten Nebendurchmesser nennen. Ist nun die Gleichung der Geraden

$$y = x \operatorname{tg}\varphi,$$

so erhalten wir für die x-Koordinate des Schnittpunktes

$$1) \quad x^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{b^2}} = \frac{\cos^2\varphi}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}},$$

analog für die y-Koordinate

$$2) \quad y^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{b^2}} = \frac{\sin^2\varphi}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}},$$

also

$$x^2 + y^2 = d^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}},$$

wo d die Länge des Halbdurchmessers, die Entfernung des Anfangspunktes vom Schnittpunkte bedeutet.

Aus den Formeln (1) und (2) ergiebt sich, dafs reelle Schnittpunkte für den Durchmesser nur erhalten werden, wenn

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2} > 0,$$

also

$$3) \quad \operatorname{tg}^2\varphi < \frac{b^2}{a^2} \text{ ist.}$$

Ist $\operatorname{tg}^2 \varphi > \frac{b^2}{a^2}$, so erhalten wir keine reellen Schnittpunkte, da $\frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}$ negativ wird. Der entgegengesetzte Wert wird positiv; setzen wir also

$$4) \quad \delta^2 = -\frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}},$$

so wird δ^2 für diese Werte von φ positiv, und δ nimmt einen reellen Wert an. Substituieren wir

$$x = \pm \delta \cos \varphi, \; y = \pm \delta \sin \varphi,$$

und setzen diese Werte von φ in (4) hinein, so giebt dies

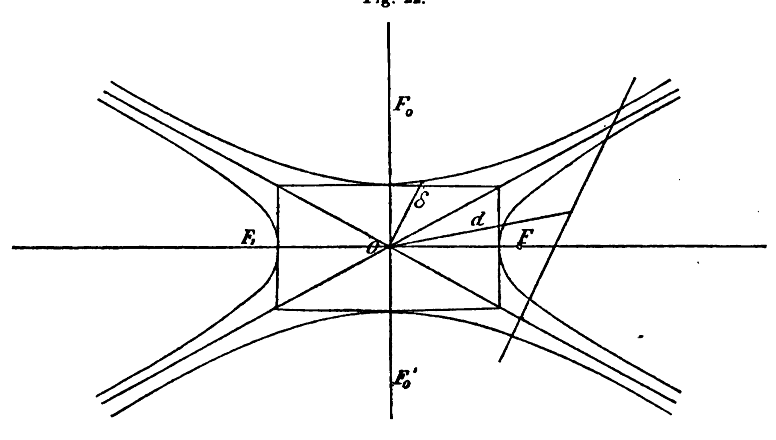
$$\delta^2 = -\frac{1}{\frac{x^2}{a^2 \delta^2} - \frac{x^2}{b^2 \delta^2}} = -\frac{\delta^2}{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

also

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Dies ist dann offenbar die Gleichung einer Hyperbel, für welche die Nebenaxe der ersten Hyperbel die Hauptaxe ist

Fig. 22.



und umgekehrt. Wir bezeichnen sie als die konjugierte Hy-

perbel der ersten und bemerken nur noch, dafs sie dieselben Asymptoten hat, als die erste (Fig. 22), aber andere Brennpunkte.

119. Ist die Gleichung eines Durchmessers $y = x \operatorname{tg} \varphi$, so ist die Gleichung einer Parallelen dazu $y = x \operatorname{tg} \varphi + m$. Für die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der Hyperbel erhalten wir die Gleichung

$$1)\quad x^2 \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2} \right\} - \frac{2m\, x \operatorname{tg} \varphi}{b^2} - \left(\frac{m^2}{b^2} + 1 \right) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für das Produkt der Wurzeln die Gleichung:

$$2)\quad x_1 x_2 = \frac{-\left(\frac{m^2}{b^2} + 1 \right) \cos^2 \varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}.$$

Ist nun der Nenner positiv, d. h. ist die Richtung der Geraden derartig, dafs ein paralleler Durchmesser reelle Schnittpunkte liefern würde, so ist das Produkt negativ, es liegen also die Schnittpunkte auf den entgegengesetzten Hyperbelzweigen, die beiden Schnittpunkte können bei diesen Richtungen nicht zusammenfallen, d. h. es kann in diesen Richtungen keine Tangenten geben. Ist dagegen der Nenner negativ, so ist $x_1 x_2$ positiv, dann liegen die Schnittpunkte, sofern solche vorhanden sind, auf demselben Zweige. Wir können also nur in diesen Richtungen, in den Richtungen der Nebendurchmesser Tangenten haben.

Die Determinante der Gleichung (1) ist (von einem positiven Faktor abgesehen)

$$\frac{m^2 \cos^2 \varphi}{a^2 b^2} + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right).$$

Hieraus ergiebt sich, dafs die Schnittpunkte reell sind, wenn

$$\operatorname{tg}^2 \varphi < \frac{b^2}{a^2} \left(1 + \frac{m^2}{b^2} \right),$$

eine Tangente aber wird die Gleichung $y = x \operatorname{tg} \varphi + m$, wenn $m^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - b^2$, wie dies schon vorher abgeleitet ist.

120. Die Sätze über die Normale sind denen bei der Ellipse sehr analog; es ist nur $-b^2$ an Stelle von b^2 zu setzen.

Die Gleichung der Normale lautet also

$$\frac{x - x_1}{x_1} a^2 + \frac{y - y_1}{y_1} b^2 = 0$$

oder

$$\frac{x}{x_1} a^2 + \frac{y}{y_1} b^2 - e^2 = 0, \text{ wo } e^2 = a^2 + b^2.$$

Es bedarf dies keiner weitern Ausführung. Ebenso erhalten wir leicht den Satz, dafs die Schnittpunkte von zwei aufeinander senkrechten Tangenten im allgemeinen auf einem Kreise liegen. Man erhält für die Schnittpunkte hier die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Wir sehen hieraus, dafs ein reeller Kreis nur vorhanden ist, wenn $a^2 > b^2$ ist. Bei solchen Hyperbeln also, bei denen $b > a$ ist, kann man nicht zwei aufeinander senkrechte Tangenten konstruieren. Ist $a^2 - b^2 = 0$, so ist $x^2 + y^2 = 0$, dann schrumpft der Kreis auf den Mittelpunkt zusammen.

121. Konjugierte Durchmesser.

Ist auch im ganzen die Ableitung der Sätze über konjugierte Durchmesser die nämliche, wie bei der Ellipse, so sind doch einige Bemerkungen noch zu machen.

Der Mittelpunkt einer Sehne PP^1 sei Q (Taf. II, Fig. 7.) Wir verbinden O mit Q, und sehen diese Gerade als neue x-Axe an, während die y-Axe ein zu PP^1 paralleler Durchmesser ist. Unter der Annahme der früheren Bezeichnungen erhalten wir sofort für die Koordinaten von P und P^1 die Gleichungen:

$$1) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos\varphi + \eta \cos\psi, & x^1 &= \xi \cos\varphi - \eta \cos\psi, \\ \eta &= \xi \sin\varphi + \eta \sin\psi, & y^1 &= \xi \sin\varphi - \eta \sin\psi. \end{aligned}$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$2) \quad \xi^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + \eta^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} - \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) - 1 = 0,$$

$$3) \quad \frac{\cos\varphi \cos\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi \,.\, \sin\psi}{b^2} = 0,$$

also

$$4) \quad \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wie bei der Ellipse, dafs die Mitten paralleler Sehnen auf einem Durchmesser liegen, und die

Sehnen, welche diesem Durchmesser parallel sind, ihre Mitten auf einem Durchmesser haben, der den ersten Sehnen parallel ist. Diese beiden Durchmesser werden als konjugierte bezeichnet.

Ist ferner

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}, \text{ so ist } \operatorname{tg} \psi > \frac{b}{a}.$$

Ist also der eine Durchmesser ein Hauptdurchmesser, so der andere ein Nebendurchmesser.

Da ferner Q auch der Mittelpunkt des Stücks zwischen den Asymptoten ist, so sind zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel immer harmonisch konjugiert zu den Asymptoten, welche daher, jede für sich, zwei zusammenfallende konjugierte Durchmesser vorstellen.

122. Für die Länge des Halbdurchmessers (Taf. II, Fig. 7) $OT = a_1$ erhalten wir nach Nr. 118

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2},$$

für die Länge des konjugierten b_1 ist aber zu setzen

$$\frac{1}{b_1^2} = -\left(\frac{\cos^2 \psi}{a} - \frac{\sin^2 \psi}{b^2}\right).$$

Diese Werthe in Gleichung (2) No. 121 eingesetzt, giebt

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Hieraus leiten wir sofort ab, dafs die Gleichungen der Asymptoten für dieses Axensystem sind:

$$\frac{\xi}{a_1} + \frac{\eta}{b_1} = 0,$$

$$\frac{\xi}{a_1} - \frac{\eta}{b_1} = 0.$$

Die Tangente in dem Endpunkte des Durchmessers ist dem konjugierten Durchmesser OL parallel, denn es ist leicht zu ersehen, dafs die Gleichung derselben ist $\xi = a_1$.

Kombinieren wir diese Gleichung mit der Asymptotengleichung $\frac{\xi}{a_1} - \frac{\eta}{b_1} = 0$, so ergiebt sich $\eta = b_1$. Dies giebt den Satz:

Das Stück einer Tangente innerhalb der Asymptoten ist dem Durchmesser gleich, welcher dem nach dem Berührungspunkte gezogenen konjugiert ist.

Aus der zuletzt angegebenen Eigenschaft ergiebt sich die Konstruktion der Axen der Hyperbel, wenn zwei konjugierte Durchmesser der Lage und Grösse nach gegeben sind. Zur Hyperbel selbst gehört noch die Angabe, welcher Durchmesser ein Hauptdurchmesser sein soll. Zeichnet man nämlich ein Parallelogramm, in welchem die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten die gegebenen Durchmesser sind, so sind die Diagonalen desselben die Asymptoten. Dieselben sind hienach leicht festzustellen, die Axen sind dann die Halbierungslinien der Winkel. Die eine Seite des Parallelogramms ist nun eine Tangente der Hyperbel, es wird dadurch also der Inhalt des Dreiecks bestimmt, das durch die Tangenten von den Asymptoten abgeschnitten wird. Schneidet man ein solches Dreieck mit diesem Inhalt ab, dsss die betreffende Seite zur Hauptaxe senkrecht ist, so erhält man die Tangente im Scheitel, und damit die Hauptaxe selbst, womit die Aufgabe als gelöst angesehen werden kann.

124. Für konjugierte Durchmesser der Hyperbel bestehen ferner die Gleichungen

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2$$
$$a_1 b_1 \sin \omega = ab,$$

welche ganz ebenso wie die entsprechenden Gleichungen bei der Ellipse abgeleitet werden. Es sei nur noch bemerkt, dafs man hier im allgemeinen nicht zwei gleiche konjugierte Durchmesser erhalten kann. Ist nämlich $a^2 - b^2$ nicht Null, so kann auch $a_1{}^2 - b_1{}^2$ nicht verschwinden, also ist a_1 von b_1 verschieden; bei der gleichseitigen Hyperbel sind dagegen die konjugierten Durchmesser immer gleich. Auch folgt noch, dafs dieselben mit den Asymptoten gleiche Winkel bilden, da die Asymptoten die Halbierungslinien der Winkel derselben sein müssen.

125. Die Brennpunkte.

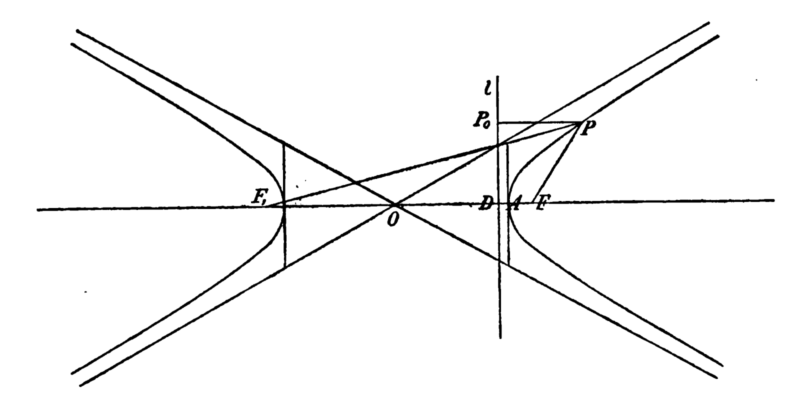
Ist P ein beliebiger Punkt (Fig. 23) der Hyperbel, so ergeben sich die Gleichungen:

$$1)\quad \begin{aligned} PF^2 &= r^2 = (x - e)^2 + y^2, \\ PF_1{}^2 &= r_1{}^2 = (x + e)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$2)\ r_1^2 - r^2 = 4ex.$$

Fig. 23.



Da nun für den Hyperbelzweig mit positiven Abscissen:

$$r_1 - r = 2a,$$

so ergiebt sich

$$3)\ r = \frac{ex}{a} - a,\ r_1 = \frac{ex}{a} + a,$$

woraus folgt $4)\ rr_1 = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2 = a_1^2$, wo a_1 den zum Punkte P gehörigen konjugierten Durchmesser bedeutet, was nicht schwer abzuleiten ist. Es ergiebt sich ferner ebenso für die Abstände eines Brennpunktes von einer Tangente

$$p = b\,\frac{\frac{ex_1}{a} - a}{a_1},\ p_1 = b\,\frac{\frac{ex_1}{a} + a}{a_1},$$

$$\text{also } 5)\ p : p_1 = r : r_1\,;\ \text{auch } pp_1 = b^2,$$

wobei die Tangente immer das Stück zwischen den Brennpunkten schneidet. Verbindet man daher einen Punkt der Hyperbel mit den Brennpunkten, so halbiert die Tangente den innern Winkel des durch jene Punkte bestimmten Dreiecks, die Normale aber den äussern Winkel.

126. Es sei $A_1 A$ die Hauptaxe (Fig. 23), D der F harmonisch konjugierte Punkt in Bezug auf die Axe, dann ist also:

$$OD = \frac{a^2}{e}.$$

In D werde nun das Lot l zur Axe errichtet, das wir Leitlinie nennen. Für das von P auf diese Linie l gefällte Lot PP_0 ergiebt sich

$$PP_0 = p = x - \frac{a^2}{e} = \frac{a}{e}\left(\frac{ex}{a} - a\right) = \frac{ar}{e},$$

also

$$\frac{p}{r} = \frac{a}{e},$$

d. h. das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes der Hyperbel von Leitlinie und Brennpunkt ist konstant, so dafs auch diese Eigenschaft in Übereinstimmung ist mit der entsprechenden der Ellipse. Der Unterschied ist der, dafs hier die Entfernung von der Leitlinie die kleinere ist.

127. Sind die Axen einer Hyperbel gleich, so nennt man sie, wie schon bemerkt, gleichseitig. Manche Eigenschaften der Hyperbel nehmen bei ihr einen besonders einfachen Character an. Wir geben hier nur folgenden Satz: Geht eine gleichseitige Hyperbel durch drei Punkte, so geht sie auch durch den Höhenschnittpunkt des dadurch bestimmten Dreiecks.

Die drei Punkte seien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$. Die Asymptoten nehmen wir als Axen an, die Gleichung der Hyperbel sei dann

$$xy = 1.$$

Nach No. 30 sind die Koordinaten des Höhenschnittpunktes durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$\begin{aligned} Dx &= x_2 x_3 (y_3 - y_2) + x_3 x_1 (y_1 - y_3) + x_1 x_2 (y_2 - y_1) + \\ &\quad (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1), \\ 1)\ Dy &= y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2) - \\ &\quad (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1), \\ D &= x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3. \end{aligned}$$

Nun ist

$$x_1 y_1 = 1,\ x_2 y_2 = 1,\ x_3 y_3 = 1,$$

also

$$x_2 x_3 (y_3 - y_2) + x_3 x_1 (y_1 - y_3) + x_1 x_2 (y_2 - y_1) = 0,$$
$$y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2) = 0,$$

also

$$Dx = (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1),$$

$$-Dy = \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_3}\right)$$

oder

$$Dy = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{y_1^2\, y_2^2\, y_3^2},$$

also

$$xy = \left\{\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)}{Dy_1\, y_2\, y_3}\right\}^2 = 1,$$

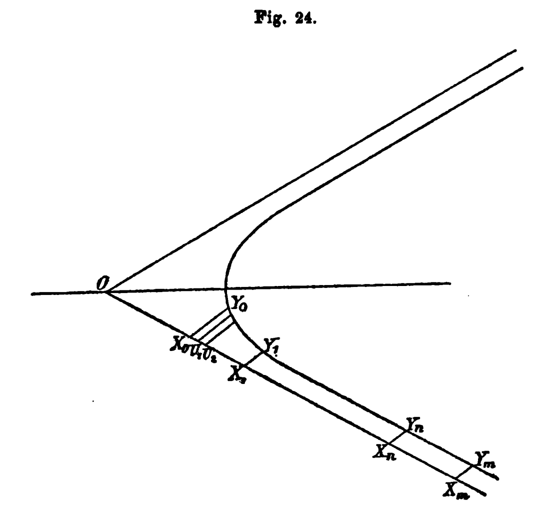
d. h. der Höhenschnittpunkt liegt ebenfalls auf der Hyperbel.

128. Quadratur der Hyperbel.

Die Aufgabe, die wir uns hier stellen, ist ein Flächenstück zu berechnen, das von einer Asymptote, zwei Parallen zur andern Asymptote und von der Hyperbel begrenzt ist. Es ist klar, dafs andere Flächenstücke darauf zurückgeführt werden können.

Wir nehmen die Asymptoten als Koordinatenaxen an (Figur 24), auf der einen, der x-Axe wollen wir die Punkte $X_0 X_1$ $X_m X_n$ annehmen, deren zugehörige x-Koordinaten x_0 $x_1\, x_m x_n$ sein mögen; die Parallelen durch diese Punkte mögen die Hyperbel in Y_0 $Y_1\, Y_m\, Y_n$ treffen, deren y-Koordinaten $y_0 y_1 y_m\, y_n$ sein mögen. Das Flächenstück $X_0 X_1 Y_1 Y_0$ heifse J_{01}; es ist klar, was hienach J_{mn} bedeutet.

Fig. 24.



Wir denken uns nun dies Stück $X_0\, X_1$ in ν gleiche Teile zerlegt, und nennen die betreffenden Teilpunkte $U_1\, U_2 \cdot\cdot U_\nu$, welcher letzte zugleich X_1 heifst, so wie X_0 auch U_0 heifse, die dazu gehörigen Abscissen sind $u_1\, u_2 \cdot\cdot u_\nu$,

wo also $u_\nu = x_1$ ist; dazu gehören die Punkte $V_1 V_2 \cdots V_\nu$ (resp. Y_1) mit den Ordinaten $v_1 v_2 \cdots v_\nu = y_1$, auch ist $y_0 = v_0$. Zieht man durch $X_0 U_1 U_2 \cdots U_\nu$ Parallele zur y-Asymptote und durch die Punkte Y_0, $V_1 V_2 V_\nu$ Parallele zur x-Asymptote, so erhalten wir Parallelogramme, aus denen sich solche Summen bilden lassen, dafs das Flächenstück J_{01} zwischen denselben liegt. Es ist offenbar

$$\frac{x_1 - x_0}{\nu} \cdot \sin\omega \cdot (v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_{\nu-1}) > J_{01} >$$

$$\frac{x_1 - x_0}{\nu} \sin\omega \, (v_1 + v_2 + \cdots + v_\nu).$$

Die Differenz jener Summen ist

$$\frac{x_1 - x_0}{\nu} \cdot \sin\omega \cdot (v_\nu - v_0).$$

Dieselbe nähert sich der Null, je grösser ν ist. Daher ist

$$J_{01} = \operatorname{Lim} \left\{ \sin\omega \, . \, \frac{x_1 - x_0}{\nu} (v_0 + v_1 + \ldots + v_{\nu-1}) \right\}$$

Es ist aber $u_0 v_0 = \frac{a^2 + b^2}{4}$, $u_h \, . \, v_h = \frac{a^2 + b^2}{4}$, wo u_h und v_h beliebige von den Koordinaten bedeuten, also

$$v_h = \frac{a^2 + b^2}{4 u_h} = \frac{a^2 + b^2}{4\left(x_0 + \frac{h(x_1 - x_0)}{\nu}\right)},$$

also

$$J_{01} = \frac{a^2 + b^2}{4} \sin\omega \cdot \operatorname{Lim} \Sigma \frac{(x_1 - x_0)}{\nu\left(x_0 + \frac{h(x_1 - x_0)}{\nu}\right)}$$

oder 1) $$J_{01} = \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot \sin\omega \operatorname{Lim} \Sigma \frac{\left(1 - \frac{x_0}{x_1}\right)}{\nu\left[\frac{x_0}{x_1} + \frac{h}{\nu}\left(1 - \frac{x_0}{x_1}\right)\right]}.$$

Diese Grösse ist also nur von $\frac{x_0}{x_1}$ und nicht von den Grössen selbst abhängig. Wir finden daher zunächst folgenden Satz:

Bestimmt man auf den Asymptoten 4 Punkte X_0 X_1 X_μ X_ν so, dafs für die dazu gehörigen Abscissen x_0 x_1 x_μ x_ν die Re-

lation besteht: $\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_\mu}{x_\nu}$ so sind die dadurch bestimmten Flächenstücke, begrenzt von den Asymptotenstücken der Hyperbel und den Parallelen zur anderen Asymptote einander gleich.

Betrachten wir nun ein Stück J_{om} und teilen $X_0\, X_m$ so ein, dafs die entsprechenden Flächenteile gleich werden. Dies wird stattfinden, wenn für die Abscissen die Gleichungen bestehen:

$$2)\ \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} \ldots = \frac{x_{m-1}}{x_m} = \frac{1}{z};$$

dann ist $x_n = x_0\, z^n$, $x_m = x_0\, z^m$, wo x_n eine willkürliche andere Abscisse von diesen bedeutet,

$$3)\ \frac{x_m}{x_n} = z^{m-n}.$$

Die dazu gehörigen Flächenteile sind $m \cdot J_{01}$ und $n \cdot J_{01}$, also ist

$$4)\ J_{nm} = (m - n)\, J_{01},$$

und

$$5)\ \frac{J_{nm}}{J_{01}} = m - n.$$

Aus (3) folgt aber:

$$(m - n) \log z = \log \frac{x_m}{x_n},$$

aber $z = \frac{x_1}{x_0}$, also $\log z = \log \frac{x_1}{x_0}$, und somit

$$6)\ m - n = \frac{\log \frac{x_m}{x_n}}{\log \left(\frac{x_1}{x_0}\right)} = \frac{J_{nm}}{J_{01}},$$

also

$$7)\ \frac{J_{nm}}{\log \left(\frac{x_m}{x_n}\right)} = \frac{J_{01}}{\log \left(\frac{x_1}{x_0}\right)},$$

d. h. $\frac{J_{nm}}{\log \frac{x_m}{x_n}}$ ist eine konstante, nur von der Hyperbel abhängige Gröfse, die wir zunächst mit k bezeichnen wollen, also

$$8)\ J_{nm} = k \,.\, \log \frac{x_m}{x_n}.$$

Es bleibt uns noch die Aufgabe k zu bestimmen. Zu dem Ende wollen wir annehmen, es nähere sich x_n dem Werte x_m. Es sei also

$$x_m = x_n + \varepsilon,$$

wo ε eine kleine Gröfse ist. Nehmen wir dann die Logarithmen, deren Basis $e = 2,718\,718$ etc. ist, so ergiebt sich

$$9)\quad \text{Lim } J_{nm} = k \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{x_n}\right) = \frac{k \,.\, \varepsilon}{x_n}.$$

Ist aber n sehr nahe an m, so geht das Flächenstück in ein Parallelogramm über, wir erhalten

$$10)\quad \text{Lim } J_{nm} = \varepsilon \,.\, y_n \,.\, \sin \omega,$$

aber

$$x_n\, y_n \,.\, \sin \omega = \frac{ab}{2},$$

also

$$y_n \sin \omega = \frac{ab}{2\,x_n},$$

somit

$$11)\quad \text{Lim } J_{nm} = \frac{\varepsilon \,.\, ab}{2 \,.\, x_n}.$$

Vergleichen wir die Gleichungen (9) und (11), so ergiebt sich $k = \frac{ab}{2}$; also schliefslich

$$12)\quad J_{nm} = \frac{ab}{2} \log \frac{x_m}{x_n}.$$

Hieraus folgt noch, dafs das ganze Stück zwischen Asymptoten und Hyperbel unendlich grofs ist. Diese Folgerung kann man freilich auch daraus machen, dafs man immer zu einer Abscisse eine andere finden kann, für welche das entsprechende Flächenstück $n$mal so grofs ist.

Bem. An sich ist es nicht nötig, dafs Flächenteile, welche sich bis in die Unendlichkeit erstrecken, auch unendlich sind. Bei der Parabel ist ja die Summation unendlich vieler Stücke ausgeführt, wobei eine endliche Gröfse herauskommt.

VIII. Kapitel.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

129. Wir fanden vorher drei Kurven zweiten Grades, denn der Kreis konnte als spezieller Fall der Ellipse angesehen werden. Wir werden nun untersuchen, welche Kurven die allgemeine Gleichung zweiten Grades darstellt. Wir nehmen diese in folgender Form:

$$u = ax^2 + by^2 + c + 2c_1\, xy + 2b_1\, x + 2a_1\, y = 0.$$

Offenbar kann ein solcher Ausdruck durch Multiplikation von zwei linearen Faktoren entstehen; wir wollen daher zunächst untersuchen, unter welcher Bedingung stellt der Ausdruck u ein Produkt von zwei linearen Faktoren vor.

Die beiden linearen Faktoren mögen, abgesehen von einem konstanten Faktor, sein:

$$u_1 = px + qy + 1, \quad u_2 = p_1\, x + q_1\, y + 1.$$

Man bemerkt leicht, dafs das Produkt unverändert bleibt, wenn man einen Faktor mit einer Zahl λ multipliziert, den andern aber durch λ dividiert. Um daher von bestimmten Voraussetzungen ausgehen zu können, nehmen wir an, dafs die von x und y freien Glieder 1 sind, dann ergiebt sich sofort

$$u = cu_1 \cdot u_2$$

oder

$$1)\quad ax^2 + by^2 + c + 2c_1\, xy + 2b_1\, x + 2a_1\, y = c\,(px + qy + 1) \cdot (p_1\, x + q_1\, y + 1).$$

Sollen die beiden Ausdrücke gleich sein, so folgt daraus

$$2)\quad \begin{aligned} (\alpha)\quad & a = cpp_1 \\ (\beta)\quad & b = cqq_1 \\ (\gamma)\quad & 2c_1 = c\,(pq_1 + p_1 q) \\ (\delta)\quad & 2b_1 = c\,(p + p_1) \\ (\varepsilon)\quad & 2a_1 = c\,(q + q_1). \end{aligned}$$

Wir haben hier fünf Gleichungen, aber nur vier zu bestimmende Gröfsen, deshalb mufs eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten $a\; b\; c\; a_1\; b_1\; c_1$ bestehen. Aus (α) und (δ) folgt

$$p + p_1 = \frac{2b_1}{c}, \quad pp_1 = \frac{a}{c},$$

also sind p und p_1 die Wurzeln der Gleichung

$$2)\ z^2 - \frac{2b_1}{c} z + \frac{a}{c} = 0.$$

Ebenso sind q und q_1 die Wurzeln der Gleichung

$$3)\ z^2 - \frac{2a_1}{c} z + \frac{b}{c} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen läſst sich p und p_1, q und q_1 berechnen und in die Gleichung (γ) einsetzen. Hierbei ist zu bemerken, daſs die Wurzeln dieser Gleichungen doppeldeutig sind, so daſs p von p_1, ebenso q von q_1 nicht definitiv zu unterscheiden ist. Wenn wir aber auch p in p_1 und q in q_1 übergehen lassen, wir erhalten dadurch für $\frac{2c_1}{c}$ nur 2 verschiedene Werte, nämlich

$$pq_1 + p_1 q \text{ und } pq + p_1 q_1.$$

Hienach ist entweder

$$pq_1 + p_1 q - \frac{2c_1}{c} = 0 \text{ oder } pq + p_1 q_1 - \frac{2c_1}{c} = 0$$

zu setzen. Es ist daher ganz unzweifelhaft

$$\left(pq_1 + p_1 q - \frac{2c_1}{c}\right)\left(pq + p_1 q_1 - \frac{2c_1}{c}\right) = 0;$$

wird die Multiplikation ausgeführt, und alles möglichst durch die Summe und das Produkt der Gröſsen p und q ausgedrückt, so findet man die Gleichung

$$\left\{(p + p_1)^2 qq_1 + (q + q_1)^2 pp_1 - 4pp_1 qq_1\right\} - \frac{2c_1}{c}\left\{(p + p_1)(q + q_1)\right\} + \frac{4c_1^2}{c^2} = 0.$$

Setzen wir für $p + p_1$, pp_1, $q + q_1$, qq_1 die Werte in den Koeffizienten und multiplizieren die erhaltene Gleichung mit $-\frac{c^3}{4}$, so ergiebt sich

$$4)\ abc + 2a_1 b_1 c_1 - aa_1^2 - bb_1^2 - cc_1^2 = 0$$

oder in Determinantenform

$$5)\ \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 \\ c_1 & b & a_1 \\ b_1 & a_1 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ oder kurz } \Delta = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so läſst sich also u in 2 lineare Faktoren u_1 und u_2 zerlegen, die indessen auch imaginär sein

können, ebenso wie die Wurzeln der Gleichungen (2) und (3). Sind die Wurzeln reell, so stellt die Gleichung $u = 0$ soviel dar, als die Gleichungen $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$, dies sind aber die Gleichungen von zwei Geraden. Ist somit die obengenannte Bedingung (4) erfüllt, so stellt im allgemeinen die Gleichung $u = 0$ zwei Gerade dar. Um die Gleichungen derselben zu finden, ist darauf zu achten, dafs diejenigen p und q zusammengesetzt werden, welche die Bedingung erfüllen

$$pq_1 + p_1 q = \frac{2c_1}{c}.$$

130. Wir wollen nun annehmen, die Gleichung $\Delta = 0$ bestehe nicht zwischen den Koeffizienten, dann wird die Gleichung irgend eine Kurve vorstellen. Beziehen wir die Kurve auf ein anderes Koordinatensystem, so kann ihr Charakter nicht geändert werden, wenn auch die Form der Gleichung sich ändert. Wir setzen zunächst

$$1)\quad x = \alpha + \xi \qquad y = \beta + \eta.$$

Dadurch geht u in v über, sodafs wird:

$$2)\quad v = a\xi^2 + b\eta^2 + 2c_1\,\xi\eta + 2\,(a\alpha + c_1\beta + b_1)\,\xi + 2\,(c_1\alpha + b\beta + a_1)\,\eta + a\alpha^2 + b\beta^2 + c + 2c_1\,\alpha\beta + 2b_1\,\alpha + 2a_1\beta = 0.$$

Nun wollen wir α und β so bestimmen, dafs

$$3)\quad a\alpha + c_1\beta + b_1 = 0, \qquad c_1\alpha + b\beta + a_1 = 0$$

wird; hieraus folgt

$$4)\quad \alpha = \frac{c_1\,a_1 - bb_1}{ab - c_1^{\,2}},\quad \beta = \frac{b_1\,c_1 - aa_1}{ab - c_1^{\,2}}.$$

Dadurch erhalten wir

$$v = a\xi^2 + b\eta^2 + 2c_1\,\xi\eta + N = 0.$$

Dabei ist gesetzt

$$N = a\alpha^2 + b\beta^2 + c + 2c_1\,\alpha\beta + 2b_1\,\alpha + 2a_1\,\beta = \alpha\,(a\alpha + c_1\beta + b_1) + \beta\,(c_1\alpha + b\beta + a_1) + b_1\alpha + a_1\beta + c,$$

also auch

$$N = b_1\alpha + a_1\beta + c = \frac{(c_1\,a_1 - bb_1)\,b_1 + (b_1c_1 - aa_1)\,a_1 + c\,(ab - c_1^{\,2})}{ab - c_1^{\,2}}$$

$$= \frac{abc + 2a_1 b_1 c_1 - aa_1^2 - bb_1^2 - cc_1^2}{ab - c_1^2}$$

$$= \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} a & c_1 \\ c_1 & b \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Die Gleichung der Kurve wird also

$$5)\quad v = a\xi^2 + b\eta^2 + 2c_1\,\xi\eta + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Substituieren wir in dieser Gleichung $-\xi$ an Stelle von ξ und zugleich $-\eta$ für η, so bleibt die Gleichung unverändert. Die Verbindungslinie der betreffenden Punkte geht dann immer durch den Koordinaten-Anfangspunkt und wird in ihm halbiert. Es folgt also, wenn man durch den neuen Koordinaten-Anfangspunkt irgend eine Sehne zieht, so wird dieselbe in diesem Punkte halbiert, derselbe heifst daher Mittelpunkt. Die oben bestimmte Form (5) ist also die auf den Mittelpunkt der Kurve als Anfangspunkt bezogene Gleichung derselben. Auf diese Form können wir aber, wie aus dem vorigen hervorgeht, die Kurve nur bringen, wenn

$\delta = ab - c_1^2$ nicht 0 ist.

131. Zur weitern Transformation nehmen wir an, dafs $ab - c_1^2$ nicht verschwindet. Wir wollen nun eine Drehung des Koordinatensystems vornehmen, wobei das neue auch rechtwinklig bleiben soll. Es wäre also zu setzen:

$$\xi = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$
$$\eta = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Es läfst sich aber die Sache noch anders darstellen, wir setzen zu dem Ende

$$1)\quad \xi = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$\eta = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

und fügen die Bedingung hinzu, dafs

$$2)\quad \xi^2 + \eta^2 = X^2 + Y^2$$

werden soll. Diese Gröfsen stellen nämlich das Quadrat des Abstandes eines betreffenden Punktes vom Anfangspunkte dar, wenn das Axensystem rechtwinklig ist. Wird aber nur eine einfache Drehung des Systems vorgenommen, so bleibt der Abstand dabei ungeändert. Die Übereinstimmung der Transformationen (1) und (2) mit den vorherstehenden wird auch sonst noch durch den weiteren Verlauf der Rechnung bestätigt.

Die Transformation soll ferner so beschaffen sein, dafs der in XY multiplizierte Koeffizient 0 wird. Wir können hienach sagen, man soll die Substitutionen (1) so einrichten, dafs folgende Gleichungen bestehen:

$$3)\quad a\xi^2 + b\eta^2 + 2c_1\,\xi\eta = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 = X^2 + Y^2.$$

Durch Ausführung der Substitutionen erhalten wir:

$$a(\alpha_1^2 X^2 + 2\alpha_1\beta_1 XY + \beta_1^2 Y^2) + 2c_1\{\alpha_1\alpha_2 X^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)XY +$$
$$\beta_1\beta_2 Y^2\} + b(\alpha_2^2 X^2 + 2\alpha_2\beta_2 XY + \beta_2^2 Y^2) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2,$$
$$(\alpha_1 X + \beta_1 Y)^2 + (\alpha_2 X + \beta_2 Y)^2 = X^2 + Y^2.$$

Indem wir die Koeffizienten der gleichen Potenzen von X und Y gleich setzen, erhalten wir folgendes System:

$$4)\quad a\alpha_1^2 + 2c_1\,\alpha_1\alpha_2 + b\alpha_2^2 = \lambda_1,$$
$$5)\quad a\beta_1^2 + 2c_1\,\beta_1\beta_2 + b\beta_2^2 = \lambda_2,$$
$$6)\quad a\alpha_1\beta_1 + c_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + b\alpha_2\beta_2 = 0,$$
$$7)\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$
$$8)\quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$$
$$9)\quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Es sind also sechs Gleichungen mit sechs zu bestimmenden Gröfsen $\lambda_1\,\lambda_2$, $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$.

132. Es ist in No. 131 die Möglichkeit der Transformation der Gleichungen (3) gezeigt, es soll nun die Auflösung der Gleichungen (4) bis (9) erfolgen. Multipliziert man (7) mit (8), so giebt dies

$$1)\quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 1,$$

aber

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2,$$

also wegen (9) in No. 131

$$2)\quad (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = 1$$

oder

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \pm 1.$$

Wir wollen hier nur das positive Zeichen nehmen, da die Durchführung mit dem negativen keine andern Schwierigkeiten bietet. auch nichts Neues gerade giebt. Wir kombinieren nun

$$3)\quad \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 = 1,$$
$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1,$$

multiplizieren hier die erste mit β_1, die zweite mit α_2 und addieren, dies giebt

$$\alpha_1 (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) = \beta_1 + \alpha_2,$$

oder da

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0,$$

so ist

$$4) \quad \alpha_2 + \beta_1 = 0, \quad \beta_1 = -\alpha_2$$

Dadurch folgt aus Gleichung (9) in No. 131 sofort

$$5) \quad \beta_2 = \alpha_1.$$

Hienach ergeben sich aus:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$$
$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0,$$

die andern Gleichungen

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1,$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$$
$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0.$$

Die Gleichungen (4) und (5) in No. 131 ergeben durch Addition

$$6) \quad a + b = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) in No. 131 und (4) und (5) No. 182 folgt, dafs wir setzen können

$$7) \quad \alpha_1 = \cos\varphi, \quad \alpha_2 = -\sin\varphi$$
$$\beta_1 = \sin\varphi, \quad \beta_2 = \cos\varphi.$$

Dies in (6) No. 131 eingesetzt, erhalten wir

$$a \sin 2\varphi + 2c_1 \cos 2\varphi - b \sin 2\varphi = 0,$$

woraus

$$8) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2c}{a-b}.$$

Setzen wir die sich hieraus ergebenden Werte von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ in die Gleichungen (4) und (5) No. 131, so ergeben sich λ_1 und λ_2; wir wollen diese Gröfsen aber direkt berechnen.

Führen wir in (6) No. 131 die α statt der β ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$9) \quad a\alpha_1^2 + 2c_1 \alpha_1 \alpha_2 + b\alpha_2^2 = \lambda_1,$$
$$-a\alpha_1 \alpha_2 + c_1 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b\alpha_1 \alpha_2 = 0.$$

Diese letzte können wir schreiben

$$(a\alpha_1 + c_1\alpha_2)\alpha_2 = (c_1\alpha_1 + b\alpha_2)\alpha_1$$

oder

$$10)\quad \frac{a\alpha_1 + c_1\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{c_1\alpha_1 + b\alpha_2}{\alpha_2} = \varkappa,$$

wo $\varkappa$ eine noch zu bestimmende Gröſse ist. Statt (9) schreiben wir

$$(a\alpha_1 + c_1\alpha_2)\alpha_1 + (c_1\alpha_1 + b\alpha_2)\alpha_2 = \lambda_1,$$

also wegen (10)

$$\varkappa(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \lambda_1, \text{ also } \varkappa = \lambda_1.$$

Sonach erhalten wir aus (10)

$$11)\quad (a - \lambda_1)\alpha_1 + c_1\alpha_2 = 0,$$
$$c_1\alpha_1 + (b - \lambda_1)\alpha_2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von α_1 und α_2:

$$12)\quad (a - \lambda_1)(b - \lambda_1) - c_1^2 = 0.$$

Die Gleichungen (5) und (6) in No. 131 geben ebenso, indem wir die β einführen

$$(a - \lambda_2)\beta_1 + c_1\beta_2 = 0,$$
$$c_1\beta_1 + (b - \lambda_2)\beta_2 = 0.$$

Sonach erhalten wir für λ_2 dieselbe Gleichung, also sind λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung:

$$(a - \lambda)(b - \lambda) - c_1^2 = 0 \text{ oder}$$

$$13)\quad \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c_1^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + c_1^2}$$
$$= \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c_1^2},$$

sodaſs die Wurzeln λ stets reell sind.

Damit ist nun die Gleichung $v = 0$ in die neue Form gebracht, wenn δ nicht Null ist:

$$14)\quad w = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

133. Diskussion der Gleichung $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$

Dividieren wir durch $-\frac{\Delta}{\delta}$ so erhalten wir die Form:

$$1)\quad \frac{X^2}{\left(\frac{-\Delta}{\delta\lambda_1}\right)} + \frac{Y^2}{\left(\frac{-\Delta}{\delta\lambda_2}\right)} - 1 = 0.$$

Es können nun folgende Fälle bestehen:

a) λ_1 und λ_2 haben unter sich und mit $\frac{\Delta}{\delta}$ gleiches Zeichen; wir können also setzen

$$\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a_0^2, \quad \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b_0^2.$$

Dann wird aus (1):

$$2)\quad \frac{X^2}{a_0^2} + \frac{Y^2}{b_0^2} + 1 = 0.$$

Die Summe von 3 positiven Gröfsen kann nie verschwinden, es giebt also keinen Punkt, dessen Koordinaten dieser Gleichung genügen können, diese Gleichung stellt keine Kurve dar.

b) λ_1 und λ_2 haben das entgegengesetzte Zeichen von $\frac{\Delta}{\delta}$, also $\frac{-\Delta}{\delta\lambda_1} = a_0^2$, $\frac{-\Delta}{\delta\lambda_2} = b_0^2$, die Gleichung würde dann lauten

$$3)\quad \frac{X^2}{a_0^2} + \frac{Y^2}{b_0^2} - 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse.

c) λ_1 und λ_2 haben verschiedene Zeichen, dann ist entweder

$$\frac{-\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \text{ also gleich } a_0^2,$$

und

$$\frac{-\Delta}{\delta\lambda_2} < 0, \text{ also gleich } -b_0^2,$$

oder

$$\frac{-\Delta}{\delta\lambda_1} < 0, \text{ also gleich } -a_0^2,$$

und

$$\frac{-\Delta}{\delta\lambda_2} > 0, \text{ also gleich } b_0^2 \text{ zu setzen.}$$

Die Gleichung (1) geht dann in die Formen über

$$4)\quad \frac{X^2}{a_0^2} - \frac{Y^2}{b_0^2} - 1 = 0,$$

oder

$$\frac{-X^2}{a_0^2} + \frac{Y^2}{b_0^2} - 1 = 0.$$

In beiden Fällen sind dies Hyperbeln. Eine Hyperbel erhalten wir also, wenn die vorher mit λ_1 und λ_2 bezeichneten Wurzeln der Gleichung (13) verschiedene Zeichen haben. Nach einer bekannten Eigenschaft der quadratischen Gleichungen ist aber

$$\lambda_1 \lambda_2 = ab - c_1^2.$$

Sollen also die Wurzeln verschiedene Zeichen haben, so mufs $ab - c_1^2 < 0$ sein. Ist dagegen $ab - c_1^2 > 0$, so haben die Wurzeln gleiches Zeichen. Bezeichnen wir nun die Gleichung (2) als die einer imaginären Ellipse, so können wir folgende allgemeine Regel aufstellen: Ist die allgemeine Form einer Gleichung 2ten Grades

$$u = ax^2 + by^2 + c + 2c_1xy + 2b_1x + 2a_1y = 0,$$

und ist weder $\Delta = abc + 2a_1b_1c_1 - aa_1^2 - bb_1^2 - cc_1^2 = 0$ noch $\delta = ab - c_1^2 = 0$, so stellt $u = 0$ Ellipsen dar, wenn $ab - c_1^2 > 0$; dagegen Hyperbeln, wenn $ab - c_1^2 < 0$.

Wenn wir uns die Aufgabe stellen, den Ausdruck $ax^2 + by^2 + 2c_1xy$ in 2 Faktoren zu zerlegen, so stellt sich heraus, dafs reelle Faktoren herauskommen, wenn $ab - c_1^2 < 0$, aber imaginäre, wenn $ab = c_1^2 > 0$. Daher können wir das Kriterium noch anders fassen, nämlich: Läfst sich das Polynom, welches aus den Gliedern 2ter Ordnung in den Unbekannten besteht, in reelle Faktoren zerlegen, so stellt die ganze Gleichung eine Hyperbel, wenn nicht, dann eine reelle oder imaginäre Ellipse dar. Ist $\Delta = 0$, so stellt die Gleichung 2 Gerade dar, die aber reell oder imaginär sein können.

Bem. Die Fälle $a = 0$, $b = 0$ etc. vereinfachen im allgemeinen nur die Untersuchung, ohne das Wesen zu ändern. Man sieht sofort, dafs $a = 0$ oder $b = 0$ Hyperbeln liefert. Ist $c_1 = 0$, so ist das Kriterium ob Ellipse oder Hyperbel einfach aus den Zeichen von a und b zu finden.

134. Es ist jetzt noch die allgemeine Gleichung $u = 0$ für den Fall zu untersuchen, dafs $ab - c_1^2 = 0$ ist. Es ist dann

$$ax^2 + 2c_1xy + by^2 = a\left(x + \frac{c_1}{a}y\right)^2;$$

also

$$1) \quad au = a^2x^2 + aby^2 + 2ac_1xy + ac + 2ab_1x + 2aa_1y =$$
$$= (ax + c_1y)^2 + 2ab_1x + 2aa_1y + ac = 0.$$

Denken wir uns nun die Geraden, deren Gleichungen sind:

$$ax + c_1 y = 0,$$
$$2ab_1 x + 2aa_1 y + ac = 0$$

als neue Koordinatenaxen, so müssen die Transformationen nach No. 23 von der Form sein:

$$\xi = -k\left(ab_1 x + aa_1 y + \frac{ac}{2}\right),$$
$$\eta = k_1\ (ax + c_1 y),$$

wo k und k_1 unbekannte, aber konstante Faktoren sind. Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$2)\quad \frac{\eta^2}{k_1^2} - \frac{2\xi}{k} = 0 \text{ oder } \eta^2 - \frac{2k_1^2}{k}\xi = 0,$$

welches die Gleichung einer Parabel, im allgemeinen für schiefwinklige Koordinaten ist.

135. Um die Hauptaxengleichung direkt zu erhalten, setzen wir

$$1)\quad au = (ax + c_1 y + k)^2 + 2\,(ab_1 - ak)\,x + 2\,(aa_1 - c_1 k)\,y + \\ + ac - k^2 = 0;$$

ferner

$$2)\quad \xi = -\lambda_1\left\{(ab_1 - ak)\,x + (aa_1 - c_1 k)y + \frac{ac - k^2}{2}\right\};$$

$$3)\quad \eta = \lambda\,(ax + c_1 y + k).$$

Damit diese Geraden auf einander senkrecht stehen, mufs sein:

$$a^2\,(b_1 - k) + c_1\,(aa_1 - c_1 k) = 0,$$

woraus (4) $k = \dfrac{a^2 b_1 + aa_1 c_1}{a^2 + c_1^2} = \dfrac{ab_1 + a_1 c_1}{a + b}.$

Für λ und λ_1 erhält man leicht:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{a\,(a + b)}},$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{(ab_1 - ak)^2 + (aa_1 - c_1 k)^2}},$$

ferner $ab_1 - ak = \dfrac{a}{a+b}(bb_1 - a_1 c_1) = \dfrac{a\sqrt{b}}{a+b}(b_1\sqrt{b} - a_1\sqrt{a}),$

$$aa_1 - c_1 k = \frac{a\,(aa_1 - b_1 c_1)}{a + b} = \frac{a\sqrt{a}}{a + b}(a_1\sqrt{a} - b_1\sqrt{b}),$$

also
$$\lambda_1 = \frac{a+b}{a\sqrt{(a+b)(a_1\sqrt{a}-b_1\sqrt{b})^2}},$$

$$\lambda_1 = \pm\left\{\frac{\sqrt{a+b}}{a(a_1\sqrt{a}-b_1\sqrt{b})}\right\}.$$

Die Gleichung (1) geht dann über in

$$\frac{\eta^2}{\lambda^2} - \frac{2\xi}{\lambda_1} = 0, \text{ oder}$$

$$4)\quad \eta^2 - \frac{2(a_1\sqrt{a}-b_1\sqrt{b})}{(a+b)\sqrt{a+b}}\xi = 0.$$

Würde noch sein: $a_1\sqrt{a} - b_1\sqrt{b} = 0$, so erhielte man $\eta^2 = 0$, und es würde $u = 0$ eine doppelt zählende Gerade vorstellen.

Es könnte endlich noch $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ sein. Es würde dann die Gleichung $u = 0$ übergehen in

$$(ax + c_1y)^2 + ac = 0, \text{ oder}$$

$$5)\quad (ax + c_1y + \sqrt{-ac})(ax + c_1y - \sqrt{-ac}) = 0.$$

Diese Gleichung würde also im allgemeinen 2 Gerade vorstellen, welche parallel sind. Sagen wir also, dafs die Bedingung $ab - c_1^2 = 0$ uns Parabeln giebt, so müssen wir 2 parallele Gerade und eine doppelt zählende Gerade als spezielle Fälle der Parabel betrachten.

Hiedurch ist nun nachgewiesen, dafs wirkliche Kurven 2ter Ordnung nur Ellipse, Hyperbel und Parabel sind, dafs man aber 2 Gerade, auch eine einzige Gerade als besondere Fälle von Kurven 2ter Ordnung ansehen kann.

IX. Kapitel.

Eigenschaften der Kegelschnitte von allgemeinem Charakter.

136. Die Erklärung No. 55, die Sätze in No. 106 und No. 126 lassen die Kurven 2ter Ordnung unter einem allgemeinen Gesichtspunkte erscheinen, man bezeichnet sie dann als Kegelschnitte. Wir können hienach sagen: Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem

Punkte und einer Geraden ein bestimmtes Verhältnis haben, ist ein Kegelschnitt. Ist das Verhältnis > 1, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, ist es gleich 1, eine Parabel, ist es < 1, eine Ellipse; rückt dabei die Gerade in die Unendlichkeit, so geht die Ellipse in einen Kreis über.

Um ganz streng einzusehen, dafs wir zu den genannten Kurven kommen, wollen wir die Gleichung des Kegelschnittes aus der angegebenen Bedingung ableiten, wobei der Fall des Verhältnisses 1 auszuschliefsen ist, da er schon in No. 56 steht.

Das Verhältnis sei λ, die Gerade die y-Axe, und der gegebene Punkt habe den Abstand h von der Geraden. Die Gleichung des Kegelschnittes ist dann:

$$(x-h)^2+y^2=\lambda^2 x^2,$$

woraus successive folgt:

$$x^2(1-\lambda^2)-2hx+y^2+h^2=0,$$

$$x^2-\frac{2hx}{1-\lambda^2}+\left(\frac{h}{1-\lambda^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\lambda^2}-\frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}=0,$$

$$1)\quad \left(x-\frac{h}{1-\lambda^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\lambda^2}-\frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}=0.$$

Verschiebt man jetzt den Anfangspunkt um die Strecke $\frac{h}{1-\lambda^2}$ und nennt die neuen Koordinaten X und Y, so wird

$$2)\quad X^2+\frac{Y^2}{1-\lambda^2}-\frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}=0 \text{ oder } \frac{h\lambda}{1-\lambda^2}=a \text{ gesetzt,}$$

$$3)\quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2(1-\lambda^2)}-1=0,$$

woraus die Behauptung folgt, nur der Fall des Kreises verlangt eine besondere Betrachtung. Setzt man $\lambda=0$, so wird der Ausdruck von a auch 0. Wir müssen dann $h=\infty$ setzen, so dafs aber $h\lambda$ einen endlichen Wert annimmt. Es ergiebt sich dabei, dafs die Gerade, welche die frühere y-Axe war, eine unendliche Verschiebung erfährt.

137. Wir wollen jetzt einen Scheitel der x-Axe als Anfangspunkt annehmen, und zwar wollen wir bei der Ellipse setzen

$$x=\xi-a,$$

bei der Hyperbel

$$x=\xi+a,$$

wobei wir von den Hauptformen ausgehen.

Dies giebt bei der Ellipse

$$\frac{\xi^2 - 2a\xi + a^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ oder}$$

$$1)\quad \eta^2 = \frac{2b^2}{a}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2,$$

bei der Hyperbel

$$\frac{\xi^2 + 2a\xi + a^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$2)\quad \eta^2 = \frac{2b^2}{a}\xi + \frac{b^2}{a^2}\xi^2.$$

Somit erhalten wir folgende Gleichungen:

für die Ellipse $\qquad \eta^2 = 2p\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi^2,$

für die Parabel $\qquad \eta^2 = 2p\xi,$

für die Hyperbel $\qquad \eta^2 = 2p\xi + \frac{b^2}{a^2}\xi^2,$

wo $p = \frac{b^2}{a}$ das im Brennpunkte zur Axe errichtete bis zur Kurve reichende Lot ist, und als Halbparameter bezeichnet wird.

138. Die Gleichungen dieser Kurven sollen endlich auf Polarkoordinaten bezogen werden, deren Pol ein Brennpunkt ist. Bei der Ellipse haben wir zu setzen

$$x = e + r\cos\varphi$$
$$y = \quad r\sin\varphi.$$

Dies in die Gleichung derselben eingesetzt erhalten wir:

$$r^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + 2erb^2\cos\varphi - b^4 = 0,$$

oder durch b^4r^2 dividiert, und $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ gesetzt,

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2e}{rb^2}\cos\varphi - \frac{(a^2 - e^2\cos^2\varphi)}{b^4} = 0,$$

also $\qquad \frac{1}{r} = \frac{e}{b^2}\cos\varphi \pm \frac{a}{b^2}.$

Da aber $e < a$ und r positiv sein soll, so ist nur das positive Zeichen zu wählen. Dies giebt

$$1)\quad r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \lambda\cos\varphi}, \text{ wo } \lambda = \frac{e}{a} \text{ ist.}$$

Bei der Parabel ist zu setzen

$$x = \frac{p}{2} + r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi.$$

Dies giebt leicht die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} + \frac{2 \cos\varphi}{rp} - \frac{\sin^2 \varphi}{p^2} = 0,$$

also, da r positiv sein soll,

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \cos \varphi}{p},$$

oder

$$2) \quad r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Fangen wir beim Winkel φ von der Richtung nach dem Scheitel zu rechnen, so wird die Gleichung

$$3) \quad r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

Bei der Hyperbel setzen wir wieder

$$x = e + r \cos\varphi, \; y = r \sin\varphi.$$

Dies giebt die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} + \frac{2 e \cos\varphi}{rb^2} + \frac{e^2 \cos\varphi - a^2}{b^4} = 0,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{- e \cos\varphi \pm a}{b^2},$$

oder endlich

$$4) \quad r = \frac{b^2}{- e \cos\varphi \pm a} = \frac{p}{- \lambda \cos\varphi \pm 1}.$$

Für den positiven Zweig ist der kleinste Winkel von φ derjenige, für welchen $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, also $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}}} = \frac{a}{e} = \frac{1}{\lambda}$ ist; mithin ist für diese Punkte $\lambda \cos \varphi < 1$, daher das positive Zeichen zu wählen, also hier

$$r = \frac{p}{1 - \lambda \cos\varphi}.$$

Für die Punkte des anderen Zweiges ist $\lambda \cos\varphi > 1$. Hier haben wir daher

$$r = \frac{p}{\lambda \cos\varphi - 1}.$$

Rechnen wir den Winkel von der Richtung nach dem Scheitel, so können wir setzen

$$r = \frac{p}{\lambda \cos\varphi + 1}.$$

139. Um weitere allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte nachzuweisen, gehen wir von der allgemeinen Gleichung 2ten Grades aus. Es sei also die Gleichung eines Kegelschnittes:

1) $u = ax^2 + by^2 + c + 2a_1 y + 2b_1 x + 2c_1 xy = 0.$

Sind nun $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ die Koordinaten von 2 Punkten, so sind die eines Punktes der Verbindungslinie

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (1), so bestimmen uns die Werte von λ die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurve mit der Verbindungslinie; da die Gleichung in λ vom 2ten Grade ist, so giebt es 2 Schnittpunkte. Wir wollen nun setzen:

$$u_{11} = ax_1^2 + by_1^2 + c + 2a_1 y_1 + 2b_1 x_1 + 2c_1 x_1 y_1$$
$$u_{22} = ax_2^2 + by_2^2 + c + 2a_1 y_2 + 2b_1 x_2 + 2c_1 x_2 y_2$$
$$u_{12} = ax_1 x_2 + by_1 y_2 + c + a_1 (y_1 + y_2) + b_1 (x_1 + x_2) + c_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$u_{21} = ax_2 x_1 + by_2 y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = u_{12}.$$

Jene Gleichung in λ wird dann nach der Multiplikation mit $(1 + \lambda)$

2) $u_{11} + 2\lambda u_{12} + \lambda^2 u_{22} = 0.$

Liegt nun $x_1 y_1$ auf der Kurve, so ist $u_{11} = 0$, dann sind also die Wurzeln der Gleichung (2):

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = -\frac{2u_{12}}{u_{22}}.$$

λ_1 giebt den gegebenen Punkt, λ_2 aber den 2ten Schnittpunkt. Ist nun $u_{12} = 0$, so ist auch die 2te Wurzel 0, d. h. die beiden Schnittpunkte fallen in einen zusammen, die Gerade wird eine Tangente.

Die Gerade wird also eine Tangente, wenn $x_2 y_2$ die Bedingung erfüllen:

3) $u_{12} = 0,$

oder vollständig

$$x_2(ax_1+c_1y_1+b_1)+y_2(c_1x_1+by_1+a_1)+(b_1x_1+a_1y_1+c)=0.$$

Denken wir uns x_2 und y_2 als veränderliche Koordinaten und schreiben x, y dafür, so sehen wir, daſs es die Gleichung einer Geraden ist, also die Gleichung der Tangente.

140. Ist x_1y_1 nicht ein Punkt der Kurve, so ist u_{11} nicht 0. Eine Tangente wird aber die Verbindungslinie der beiden Punkte, wenn die beiden Wurzeln für λ einander gleich werden. Dies ist der Fall, wenn die Determinante der Gleichung (2) verschwindet; d. h. es muſs dann sein

1) $u_{11}\cdot u_{22}-u_{12}^2=0.$

So oft also x_2y_2 diese Bedingung erfüllt, erhalten wir eine Tangente. Setzen wir nun x und y anstatt x_2y_2, so erhalten wir eine Gleichung 2ten Grades, die also die Gleichung der beiden Tangenten vorstellen muſs. Dies giebt

2) $$(ax_1^2+by_1^2+c+2a_1y_1+2b_1x_1+2c_1x_1y_1)(ax^2+by^2+c+2a_1y+2b_1x+2c_1xy)-[ax_1x+by_1y+c+a_1(y_1+y)+b_1(x_1+x)+c_1(x_1y+y_1x)]^2=0.$$

Diese Gleichung 2ten Grades muſs hienach eine solche sein, die sich in 2 Faktoren zerlegen läſst, so daſs die Determinante Δ verschwinden muſs. Die Faktoren können selbstverständlich auch imaginär sein, was damit übereinstimmt, daſs es Punkte giebt, von denen sich keine Tangenten an die Kurve ziehen lassen.

141. Wir setzen nun voraus, daſs die Kurve einen Mittelpunkt besitzt, und wollen von ihm die Tangenten an dieselbe ziehen. Sind x_1y_1 die Koordinaten des Mittelpunktes, so erfüllen sie die Gleichungen (No. 130)

1) $ax_1+c_1y_1+b_1=0,$
$c_1x_1+by_1+a_1=0.$

Da nun:

$u_{11}=x_1(ax_1+c_1y_1+b_1)+y_1(c_1x_1+by_1+a_1)+(b_1x_1+a_1y_1+c)$, so geht u_{11} über in $b_1x_1+a_1y+c=\frac{\Delta}{\delta}$, wo

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & c_1 & b_1\\ c_1 & b & a_1\\ b_1 & a_1 & c\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix}a & c_1\\ c_1 & b\end{vmatrix}.$$

Die Gleichung der Tangenten vom Mittelpunkte wird dann

$$u \cdot \frac{\Delta}{\delta} - \frac{\Delta^2}{\delta^2} = 0, \text{ oder}$$

2) $u - \frac{\Delta}{\delta} = 0$, oder vollständig

$$ax^2 + by^2 + 2c_1xy + 2b_1x + 2a_1y + \frac{aa_1^2 + bb_1^2 - 2a_1b_1c_1}{ab - c_1^2} = 0.$$

Für die betreffende Determinante dieser Form, die wir mit Δ_0 bezeichnen wollen, ergiebt sich leicht

$$3)\ \Delta_0 = \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 \\ c_1 & b & a_1 \\ b_1 & a_1 & c - \frac{\Delta}{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 \\ c_1 & b & a_1 \\ b_1 & a_1 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c_1 & 0 \\ c_1 & b & 0 \\ b_1 & a_1 & \frac{\Delta}{\delta} \end{vmatrix} = \Delta - \Delta = 0.$$

Die Gleichung (2) stellt hienach die der beiden Asymptoten dar.

142. Indem wir die Bezeichnung

$$\begin{aligned} u_1 &= x(ax_1 + c_1y_1 + b_1) + y(c_1x_1 + by_1 + a_1) + (b_1x_1 + a_1y_1 + c) \\ &= x_1(ax + c_1y + b_1) + y_1(c_1x + by + a_1) + (b_1x + a_1y + c) \end{aligned}$$

einführen, ergiebt sich als Gleichung der Tangenten vom Punkte x_1y_1 an die Kurve

$$1)\ uu_{11} - u_1^2 = 0.$$

Kombinieren wir also die Gleichung (1) mit der Gleichung $u = 0$, so müssen wir die Koordinaten der Berührungspunkte erhalten. Aus

$$uu_{11} - u_1^2 = 0,$$
$$u = 0$$

folgt aber $u_1^2 = 0$ oder $u_1 = 0$. Demnach müssen auch die Gleichungen $u = 0$ und $u_1 = 0$ die Berührungspunkte geben. $u_1 = 0$ ist aber die Gleichung einer Geraden, und da dieselbe die Berührungspunkte enthalten mufs, so ist es die Gleichung der Verbindungslinie der Berührungspunkte, also die Gleichung der Berührungssehne, die wir auch als Polare des Punktes bezeichnen wollen, während der Punkt der Pol jener Geraden heifst. Hienach also stellt

$$u_1 = 0$$

die Gleichung der Polare eines Punktes dar, und wir wollen sie auch dann als Gleichung der Polare bezeichnen, wenn keine Tangenten möglich sind.

Liegt x_1y_1 auf der Kurve, so ist $u_1 = 0$ die Gleichung der Tangente, wie vorher gezeigt ist.

143. Die Koordinaten von 2 Punkten P_1, P_2 seien x_1y_1 und x_2y_2. Die Koordinaten irgend eine Punktes der Verbindungslinie sind dann

$$1)\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Kombinieren wir diese Gleichungen (1) mit der Gleichung $u=0$, so erhalten wir die Gleichung in λ, deren Wurzeln in (1) eingesetzt, die Koordinaten der Schnittpunkte geben. Sind diese Schnittpunkte Q_1 und Q_2, und λ_1 und λ_2 die entsprechenden Wurzeln, so ist nach No. 7

$$2)\quad \lambda_1=\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2},\ \lambda_2=\frac{P_1Q_2}{Q_2P_2}.$$

Nehmen wir nun an, x_2y_2 genügen der Gleichung

$$u_{12}=x_2(ax_1+c_1y_1+b_1)+y_2(c_1x_1+by_1+a_1)+(b_1x_1+a_1y_1+c)=0,$$

so wird die Gleichung

$$u_{11}+2\lambda u_{12}+\lambda^2u_{22}=0$$

übergehen in

$$3)\quad u_{11}+\lambda^2u_{22}=0,$$

also ist

$$\lambda_1=+\sqrt{-\frac{u_{11}}{u_{22}}},\ \lambda_2=-\sqrt{-\frac{u_{11}}{u_{22}}},$$

somit

$$\lambda_1+\lambda_2=0,$$

oder

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1Q_2}+\frac{P_1Q_2}{Q_2P_2}=0,$$

d. h. Q_1 und Q_2 teilen P_1P_2 harmonisch. Der Gleichung $u_{12}=0$ wird aber genügt durch die Punkte der Polare von x_1y_1, d. h. der Geraden, deren Gleichung ist

$$u_1=0.$$

Dies giebt den Satz: Jede durch den Pol einer Geraden gelegte Sekante wird durch Pol, Polare und Kurve harmonisch geteilt.

144. Es werde jetzt vorausgesetzt, der Punkt x_1y_1 rücke in die Unendlichkeit, die durch den Punkt gelegten Sekanten sind also Parallele, und der harmonisch konjugierte Punkt der Mittelpunkt der Sehne. Die Gleichung der Polare ist

1) $u_1 = x\,(ax_1 + c_1 y_1 + b_1) + y\,(c_1 x_1 + b y_1 + a_1) + (b_1 x_1 + a_1 y_1 + c) = 0,$

oder setzen wir $x_1 = \infty$, nachdem die Gleichung durch x_1 dividiert ist,

2) $ax + c_1 y + b_1 + \frac{y_1}{x_1}(c_1 x + by + a_1) = 0.$

Welchen Werth also auch $\frac{y_1}{x_1}$ hat, immer geht die Gerade durch den Punkt, dessen Koordinaten die Gleichungen erfüllen

$$ax + c_1 y + b_1 = 0,$$
$$c_1 x + by + a_1 = 0,$$

d. h. durch den Mittelpunkt. Wir erhalten ferner, wenn $\frac{y_1}{x_1}$ fest bleibt, d. h. wenn die Geraden parallel bleiben, die Folgerung, dafs die Mittelpunkte auf einer Geraden, deren Gleichung eben (2) ist, liegen, und da sie durch den Mittelpunkt geht, auf einem Durchmesser.

Ist $\frac{a}{c_1} = \frac{c_1}{b}$, d. h. ist die Kurve eine Parabel, so sind die Gleichungen der Geraden von der Form

$$ax + c_1 y + k = 0,$$

d. h. die Mitten paralleler Sehnen einer Parabel liegen auf einer Geraden, welche parallel zur Axe ist.

145. Pol einer Geraden.

Die Gleichung einer Geraden sei $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; wir wollen suchen, ob man einen Punkt $x_1 y_1$ finden kann, welcher der Pol derselben in Bezug auf den Kegelschnitt $u = 0$ ist. Da die Polare des Punktes ist:

1) $u_1 = x\,(ax_1 + c_1 y_1 + b_1) + y\,(c_1 x_1 + b y_1 + a_1) + (b_1 x_1 + a_1 y_1 + c) = 0,$

so müssen folgende Gleichungen bestehen:

2) $\alpha = a \cdot kx_1 + c_1 \cdot ky_1 + b_1 k,$
$\beta = c_1 \cdot kx_1 + b \cdot ky_1 + a_1 k,$
$\gamma = b_1 \cdot kx_1 + a_1 \cdot ky_1 + ck.$

Sehen wir hier kx_1, ky_1, k als Unbekannte an, so finden wir

3) $kx_1 = \frac{1}{\Delta}\left[(bc - a_1^2)\,\alpha + (a_1 b_1 - cc_1)\,\beta + (a_1 c_1 - bb_1)\,\gamma\right].$

$$ky_1 = \frac{1}{\varDelta}[(a_1b_1 - cc_1)\alpha + (ac - b_1^2)\beta + (b_1c_1 - aa_1)\gamma],$$

$$k = \frac{1}{\varDelta}[(a_1c_1 - bb_1)\alpha + (b_1c_1 - aa_1)\beta + (ab - c_1^2)\gamma],$$

wo $\varDelta$ die in No. 129 angegebene Bedeutung hat, also ist

$$4)\quad x_1 = \frac{(bc - a_1^2)\alpha + (a_1b_1 - cc_1)\beta + (a_1c_1 - bb_1)\gamma}{(a_1c_1 - bb_1)\alpha + (b_1c_1 - aa_1)\beta + (ab - c_1^2)\gamma},$$

$$y_1 = \frac{(a_1b_1 - cc_1)\alpha + (ac - b_1^2)\beta + (b_1c_1 - aa_1)\gamma}{(a_1c_1 - bb_1)\alpha + (b_1c_1 - aa_1)\beta + (ab - c_1^2)\gamma}.$$

Der Punkt wird hienach eindeutig bestimmt, den Fall $\varDelta = 0$, der uns keinen eigentlichen Kegelschnitt giebt, müssen wir dabei ausschliefsen, da dann x_1 und y_1 unendlich werden.

Es ergiebt sich noch aus (4), dass der Punkt in die Unendlichkeit rückt, wenn

$$\alpha(a_1c_1 - bb_1) + \beta(b_1c_1 - aa_1) + \gamma(ab - c_1^2) = 0,$$

oder

$$\frac{\alpha(a_1c_1 - bb_1)}{ab - c_1^2} + \beta\frac{(b_1c_1 - aa_1)}{ab - c_1^2} + \gamma = 0 \text{ ist,}$$

d. h. wenn der Mittelpunkt auf der Geraden liegt; denn

$$\frac{a_1c_1 - bb_1}{ab - c_1^2} \text{ und } \frac{b_1c_1 - aa_1}{ab - c_1^2}$$

sind die Koordinaten des Mittelpunktes.

Ist $ab - c_1^2 = 0$, ist also die Kurve eine Parabel, so ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{aa_1 - b_1c_1}{a_1c_1 - bb_1} = \frac{aa_1c_1 - b_1c_1^2}{c_1(a_1c_1 - bb_1)} = \frac{a(a_1c_1 - bb_1)}{c_1(a_1c_1 - bb_1)} = \frac{a}{c_1} = \frac{c_1}{b},$$

oder also: wenn die Gerade die Form hat

$$ax + c_1y + k = 0,$$

also ein Durchmesser ist, so liegt der Pol in der Unendlichkeit.

146. Die Gleichungen (3) No. 145 geben uns noch leicht die Bedingung dafür, dass eine Gerade den Kegelschnitt $u = 0$ berührt. Soll nämlich die Gerade eine Tangente sein, so mufs der Pol derselben auf der Kurve liegen. Setzen wir also die Koordinaten des Pols in die Gleichung des Kegelschnitts, so muss die Gleichung erfüllt werden. Es muss also sein

$$1)\quad ax_1^2 + ay_1^2 + c + 2a_1y_1 + 2b_1x_1 + 2c_1x_1y_1 = 0,$$

oder

$x_1(ax_1+c_1y_1+b_1)+y_1(c_1x_1+by_1+a_1)+(b_1x_1+a_1y_1+c)=0,$
oder wegen der Gleichungen (2) No. 145

$$2)\quad \frac{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma}{k}=0,\ \text{oder}\ \alpha x_1+\beta y_1+\gamma=0,$$

oder aus (3) die Werte für $x_1 y_1$ substituiert:

$$\alpha\,[\alpha\,(bc-a_1^2)+(a_1b_1-cc_1)\,\beta+(a_1c_1-bb_1)\,\gamma]$$
$$+\beta\,[\alpha\,(a_1b_1-cc_1)+(ac-b_1^2)\,\beta+(b_1c_1-aa_1)\,\gamma]$$
$$+\gamma\,[\alpha\,(a_1c_1-bb_1)+(b_1c_1-aa_1)\,\beta+(ab-c_1^2)\,\gamma].$$

Dies entwickelt giebt:

$$3)\quad \alpha^2(bc-a_1^2)+\beta^2(ac-b_1^2)+\gamma^2(ab-c_1^2)$$
$$+2\alpha\beta\,(a_1b_1-cc_1)+2\alpha\gamma\,(a_1c_1-bb_1)+2\beta\gamma\,(b_1c_1$$
$$-aa_1)=0.$$

Diese Gleichung läfst sich auch schreiben:

$$4)\quad \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 & \alpha \\ c_1 & b & a_1 & \beta \\ b_1 & a_1 & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}\,{}^{*)}=0.$$

147. Die Form $u_{12}=x_2\,(ax_1+c_1y_1+b_1)+y_2\,(c_1x_1+by_1+a_1)+(b_1x_1+a_1y_1+c)$ bleibt ungeändert, wenn man x_1 mit x_2 und y_1 mit y_2 vertauscht. Dies läfst eine geometrische Deutung zu. Denken wir uns x_1y_1 als Pol einer Geraden, so wird ein Punkt x_2y_2 auf der Polare liegen, wenn er der Bedingung $u_{12}=0$ genügt. Denken wir uns dann x_2y_2 als Pol einer Geraden, so wird die Gleichung der Polare

$$v_2=x\,(ax_2+c_1y_2+b_1)+y\,(c_1x_2+b_1y_2+a)+(b_1x_2$$
$$+a_1y_2+c)=0.$$

Dieser wird aber genügt, wenn $x=x_1$ und $y=y_1$ gesetzt wird, da dies die Bedingung $u_{12}=0$ ist. Wir haben also den Satz: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich die Polare um den Pol der Geraden. Ebenso lässt sich selbstverständlich schliefsen: Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare jenes festen Punktes.

---

*) Denkt man sich in $u=0$ $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ statt x und y geschrieben und u mit z^2 multipliziert, so nennt man die linke Seite der Gleichungen (3) und (4) die konjugierte Form von u. Sie ist die Gleichung des Kegelschnitts in sogenannten Linienkoordinaten, wobei die Kurve als Inbegriff aller Tangenten erscheint.

148. Dieser Satz bleibt bestehen, wenn der Punkt in die Unendlichkeit rückt; die sich bewegenden Geraden bleiben parallel, der Pol derselben bewegt sich also auf einem Durchmesser, der die Sehnen jener Geraden halbiert. Nehmen wir nun auf diesem Durchmesser den Punkt in der Unendlichkeit, so müssen die Pole der Geraden, die durch diesen Punkt gehen, auf dem Durchmesser liegen, der den ersten Punkt in der Unendlickeit enthält, d. h. die Mitten der Sehnen, die zum 2[ten] Durchmesser parallel sind, liegen auf dem ersten wieder. Wir erhalten die Sätze von den konjugierten Durchmessern als spezielle Fälle von Pol und Polare.

149. Wir wollen noch eine Anwendung von Pol und Polare machen, indem wir von der Gleichung eines Kegelschnitts ausgehen, die in der Hauptform gegeben ist. Die Gleichung laute

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1=0.$$

Die Koordinaten eines Brennpunktes sind $x_1=e$, $y_1=0$, die Gleichung der Polare lautet also

$$2)\quad \frac{xe}{a^2}-1=0,\ \text{oder}\ x=\frac{a^2}{e}.$$

Dies ist aber die Gleichung der entsprechenden Leitlinie, die also die Polare des Brennpunktes ist. Dreht sich also eine Sehne um den Brennpunkt, so schneiden sich die Tangenten in den Endpunkten auf der Leitlinie.

Die Koordinaten eines Punktes P der Leitlinie seien $x_1=\frac{a^2}{e}$, $y_1=y_1$, die Gleichung der Polare

$$3)\quad \frac{x}{e}+\frac{yy_1}{a^2-e^2}-1=0,$$

diese Gleichung wird durch $x=e$, $y=0$ erfüllt, sie geht also durch den Brennpunkt. Die Gleichung der Geraden, welche P mit dem Brennpunkt verbindet, ist

$$4)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ e & 0 & 1 \\ \frac{a^2}{e} & y_1 & 1 \end{vmatrix}=0\ \text{oder}\ -xy_1+y\left(\frac{a^2-e^2}{e}\right)+ey_1=0,$$

die Gleichung der Polare $\frac{x}{e}+\frac{yy_1}{a^2-e^2}-1=0.$

Hieraus folgt, dafs die angegebenen Geraden auf einander senkrecht sind; also gilt der Satz: Fällt man von einem Punkte der Leitlinie das Lot auf die Polare, so trifft dasfelbe den zugehörigen Brennpunkt.

Diese Sätze sind für die Parabel schon früher bewiesen, es hat keine Schwierigkeit, sie auch mit Anwendung der zuletzt gefundenen Sätze zu beweisen; der Satz in No. 64 ergiebt sich ebenfalls als specieller Fall des Satzes von Pol und Polare.

150. Die allgemeine Gleichung 2ten Gerades, die also einen Kegelschnitt darstellt, enthält 6 konstante Gröfsen, von denen die Elemente und Lage des Kegelschnitts abhängig sind, da es aber nur auf das Verhältnis dieser Gröfsen ankommt, so sehen wir, dafs im allgemeinen 5 Bedingungen nötig sind, um einen Kegelschnitt zu bestimmen. Setzen wir in die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts die Koordinaten von 5 Punkten, indem wir annehmen, dafs derselbe durch diese Punkte hindurch gehe, so werden die Konstanten linear dadurch bestimmt; es giebt sonach nur einen Kegelschnitt, der durch 5 Punkte hindurchgeht.

Sind 5 Tangenten gegeben, so würden wir die Gröfsen a, b, c, a_1, b_1, c_1 nicht direkt erhalten, sondern nach No. 146 Gl. 3 folgende Gröfsen

$$1)\quad \begin{aligned} bc - a_1^2 &= a^0, & b_1c_1 - aa_1 &= a_1^0, \\ ac - b_1^2 &= b^0, & a_1c_1 - bb_1 &= b_1^0, \\ ab - c_1^2 &= c^0, & a_1b_1 - cc_1 &= c_1^0. \end{aligned}$$

Es ist aber leicht, hieraus die Verhältnisse der Gröfsen a, b, c, a_1, b_1, c_1 zu finden; es ist nämlich

$$2)\quad \begin{aligned} a &= \lambda\left\{b^0c^0 - a_1^{0\,2}\right\}, & a_1 &= \lambda\,(b_1^0c_1^0 - a^0a_1^0), \\ b &= \lambda\left\{a^0c^0 - b_1^{0\,2}\right\}, & b_1 &= \lambda\,(a_1^0c_1^0 - b^0b_1^0), \\ c &= \lambda\left\{a^0b^0 - c_1^{0\,2}\right\}, & c_1 &= \lambda\,(a_1^0b_1^0 - c^0c_1^0). \end{aligned}$$

Durch 5 Tangenten wird also auch nur ein Kegelschnitt bestimmt.

Von besonderem Interesse ist es noch, zu sehen, wie sich die Linie in der Unendlichkeit zu den Kegelschnitten verhält. Die Gleichung einer Geraden sei

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Sollen nur die Koordinaten von Punkten in der Unendlichkeit dieser Gleichung genügen, so müssen wir $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ setzen. Dies können wir auch so einsehen. Bringen wir die obige Gleichung auf die Form

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} - 1 = 0,$$

so bedeuten x_0 und y_0 die Stücke, die von der Axe abgeschnitten werden, und es ist $x_0 = -\frac{\gamma}{\alpha}$, $y_0 = -\frac{\gamma}{\beta}$. Die Gerade in der Unendlichkeit schneidet aber offenbar unendlich grofse Stücke von den Axen ab, es mufs also $\alpha = 0$, $\beta = 0$ werden, demnach ist die Gleichung der Geraden in der Unendlichkeit $\gamma = 0$. Dies steht in Zusammenhang mit der Bemerkung in No. 112, wonach $1 = 0$ oder $N = 0$ eine Gleichung bedeutet, deren Wurzeln unendlich grofs sind. Um also zu untersuchen, wie sich die Gerade in der Unendlichkeit als Tangente verhält, haben wir in Gleichung (3) No. 146 die Gröfsen α und β gleich 0 zu setzen. Dies giebt:

$$3) \quad (ab - c_1^2)\gamma^2 = 0$$

oder also

$$ab - c_1^2 = 0,$$

d. h. die Parabel wird von der Geraden in der Unendlichkeit berührt. Demnach sind zur Bestimmung der Parabel nur noch 4 Tangenten nötig. Es fällt übrigens, wie wir sehen, das Glied mit γ^2 fort, so dafs nur die Verhältnisse von 5 Koeffizienten, also 4 Gröfsen zu bestimmen sind.

Hätten wir 4 Punkte einer Parabel, so würden wir 4 lineare Gleichungen zwischen den Verhältnissen der Koeffizienten von u haben; dazu gehört noch die quadratische Gleichung $ab - c_1^2 = 0$; dies sagt uns, dafs wir für die Verhältnisse der Koeffizienten 2 Werte erhalten, und somit giebt es 2 Parabeln, welche durch 4 Punkte gehen.

X. Kapitel. Nachtrag.

Eigenschaften der Kegelschnitte, die sich besonders auf die Krümmungsradien und Kombination von Kegelschnitten beziehen.

151. Die Gleichung der Normale an einer Ellipse in einem gegebenen Punkte $x_1\, y_1$ war früher abgeleitet:

$$1) \quad \frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} - e^2 = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung der Normale für eine Hyperbel,

indem wir $-b^2$ an Stelle von b^2 setzen. Da sich hienach die Entwicklung bei der Hyperbel nicht wesentlich anders gestaltet, so genügt es, dieselbe bei der Ellipse durchzuführen. 2 Gerade schneiden sich im allgemeinen, und dies wird auch dann der Fall sein, wenn sie sich in ihrer Lage einander nähern. Wir wollen nun den Schnittpunkt von 2 unendlich nahen Normalen bestimmen.

Die Gleichungen derselben seien:

$$2)\quad a^2xy_1 - b^2yx_1 = e^2x_1y_1$$
$$a^2xy_2 - b^2yx_2 = e^2x_2y_2.$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes:

$$3)\quad x = \frac{e^2x_1x_2(y_1-y_2)}{a^2(x_2y_1-x_1y_2)},\quad y = \frac{e^2y_1y_2(x_1-x_2)}{b^2(x_2y_1-x_1y_2)}.$$

Geht x_2 in x_1 und y_2 in y_1 über, so ist also zu bestimmen:

$$\text{Lim}\,\frac{y_1-y_2}{x_2y_1-x_1y_2} \text{ und Lim}\,\frac{x_1-x_2}{x_2y_1-x_1y_2}.$$

Es ist

$$\frac{y_1-y_2}{x_2y_1-x_1y_2} = \frac{y_1^2-y_2^2}{(x_2y_1-x_1y_2)(y_1+y_2)} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)}{x_2y_1^2-x_1y_2^2+y_1y_2(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{b^2(x_2-x_1)+\left(\frac{b^2}{a^2}x_1x_2+y_1y_2\right)(x_1-x_2)} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(x_2+x_1)}{b^2+\frac{b^2}{a^2}x_1x_2+y_1y_2},$$

also

$$\text{Lim}\,\frac{y_1-y_2}{x_2y_1-x_1y_2} = \frac{2b^2x_1}{a^2b^2+b^2x_1^2+a^2y_1^2} = \frac{x_1}{a^2},$$

da $b^2x_1^2+a^2y_1^2 = a^2b^2$ ist.

Somit ist die x-Koordinate des Schnittpunktes

$$4)\quad \xi = \frac{e^2x_1^3}{a^4}.$$

Ebenso wird die andere Koordinate erhalten

$$5)\quad \eta = -\frac{e^2y_1^3}{b^4}.$$

Man bezeichnet diesen Punkt als den Krümmungsmittelpunkt, der dem betreffenden Punkte der Ellipse angehört; die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte x_1y_1 heifst Krümmungs-

radius; der mit dem Krümmungsradius vom Krümmungsmittelpunkt beschriebene Kreis würde eine sehr genaue Berührung mit der Kurve haben, denn beim Kreise schneiden sich eben auch 2 unendlich nahe Normalen im Mittelpunkte. Für ϱ ergiebt sich noch die Gleichung:

$$\varrho^2 = (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 = \frac{x_1{}^2 (a^4 - e^2 x_1{}^2)^2}{a^8} + \frac{y_1{}^2}{b^8}(b^4 + e^2 y_1{}^2)^2.$$

Nun ist $b^4 + e^2 y_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^4 - e^2 x_1{}^2)$, also

$$\varrho^2 = (a^4 - e^2 x_1{}^2)^2 \left\{\frac{x_1{}^2}{a^8} + \frac{y_1{}^2}{a^4 b^4}\right\} = \frac{(a^4 - e^2 x_1{}^2)^2}{a^8 b^4}(b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2),$$

$$6)\quad \varrho^2 = \frac{(a^4 - e^2 x_1{}^2)^3}{a^8 b^2} = \frac{\left(a^2 - \frac{e^2 x_1{}^2}{a^2}\right)^3}{a^2 b^2} = \frac{a_1{}^6}{a^2 b^2} \text{ (vid. No. 99)},$$

wo a_1 der zum Punkte $x_1 y_1$ gehörige konjugierte Durchmesser ist; also

$$7)\quad \varrho = \frac{a_1{}^3}{ab}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also proportional der dritten Potenz des zum Punkte gehörigen konjugierten Durchmessers.

152. Durch Einführung des Winkels, den die Normale mit dem Leitstrahl bildet, nimmt der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser noch andere Formen an. Die Normale sei (Taf. I, Fig. 4) TN, sie bilde mit den Leitstrahlen TF und TF_1 den Winkel ϑ. Haben nun die Lote von F_1 und F auf die Tangente in T die Längen p und p_1, und sind r und r_1 die Leitstrahlen, so ist

$$p_1 = r_1 \cos\vartheta,$$
$$p = r \cos\vartheta,$$

also wenn wir multiplizieren,

$pp_1 = rr_1 \cos^2\vartheta$, oder da $pp_1 = b^2$, und $rr_1 = a_1{}^2$ (No. 102 u. 103),

$$b^2 = a_1{}^2 \cos^2\vartheta,$$

also
$$1)\quad b = a_1 \cos\vartheta.$$

Es ist nun

$\varrho = \frac{a_1{}^3}{ab} = \left(\frac{a_1}{b}\right)^3 \cdot \frac{b^2}{a}$, oder setzt man $\frac{b^2}{a} = p$, wo $2p$ den Parameter bedeutet, so ist

$$2)\quad \varrho = \frac{p}{\cos^3\vartheta}.$$

Es ist ferner die Normale

$$TN = \frac{b}{a} a_1, \text{ also}$$

$$TN^3 = \frac{b^3}{a^3} a_1{}^3 = \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{a_1{}^3}{ab} = \frac{b^4}{a^2} \cdot \varrho,$$

also $$3)\quad \varrho = \frac{TN^3}{p^2}.$$

Aus (2) und (3) folgt noch

$$4)\quad \frac{TN^3}{p^2} = \frac{p}{\cos^3\vartheta},$$

also $$p = TN \cos\vartheta,$$

auch $$5)\quad \varrho = \frac{TN}{\cos^2\vartheta}.$$

Hieraus folgt eine einfache Konstruktion des Krümmungsradius, die vom Newton herrührt.

Man ziehe die Normale TN, errichte das Lot in N darauf, dasſelbe schneide einen Leitstrahl TF in E, in E errichte man das Lot auf dem Leitstrahl, welches die Normale in M schneide, dann ist M der Krümmungsmittelpunkt.

153. Es sei ω der Winkel, den die Tangente mit dem Durchmesser $OT = b_1$ (Taf. I, Fig. 4) bildet. Dann ist

$ab = a_1 b_1 \sin\omega$, wo a_1 und b_1 die frühere Bedeutung haben. Da nun

$$\varrho = \frac{a_1{}^3}{ab},$$

so ist auch

$$1)\quad \varrho = \frac{a_1{}^3 \cdot ab}{ab \cdot a_1 b_1 \sin\omega} = \frac{a_1{}^2}{b_1 \sin\omega},$$

also $$a_1{}^2 = \varrho b_1 \sin\omega,$$

also $$a_1{}^2 + b_1{}^2 = b_1{}^2 + \varrho b_1 \sin\omega,$$

oder $$2)\quad a^2 + b^2 = b_1{}^2 - 2 b_1 \frac{\varrho}{2} \cos(90^\circ + \omega),$$

also $$a^2 + b^2 + \frac{\varrho^2}{4} = b_1{}^2 - 2 b_1 \frac{\varrho}{2} \cos(90^\circ + \omega) + \frac{\varrho^2}{4}.$$

Trägt man also auf der Normale nach aufsen die Länge $\frac{\varrho}{2}$ an bis X, so ist

$$3)\quad a^2 + b^2 + \frac{\varrho^2}{4} = OX^2.$$

Nun ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ der Radius des Kreises, von dem aus die Tangenten unter rechtem Winkel sich schneiden, den man auch sehr leicht konstruieren kann. Aus (3) folgt leicht, dafs, wenn man von X mit $\frac{\varrho}{2}$, also mit XT den Kreis zeichnet, dieser den vorher bezeichneten rechtwinklig schneiden wird. Nach einem bekannten Satze mufs dann die Polare von T in Bezug auf den Ortskreis der rechtwinkligen Tangenten durch den 2[ten] Endpunkt des Durchmessers im Kreise X gehen. Wir erhalten daher folgende 2[te] Konstruktion.

Man konstruiere in T die Normale, verlängere sie nach aufsen, konstruiere den Ortskreis der rechtwinkligen Tangenten, suche zu T die Polare in Bezug auf diesen Kreis, welche die Normale in W schneide, dann ist TW die Länge des Krümmungsradius. Um den Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, mufs man diese Länge nach innen auftragen.

Bem. Für die Hyperbel erhält man nichts wesentlich Verschiedenes; die Entwicklung wird daher hier übergangen.

154. Bei der Parabel sind die Gleichungen von 2 Normalen

$$1)\quad py + xy_1 - y_1(x_1 + p) = 0,$$
$$py + xy_2 - y_2(x_2 + p) = 0.$$

Durch Subtraktion und Division durch $y_1 - y_2$ folgt

$$2)\quad x = p + \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2} = p + x_1 + \frac{y_2(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2},$$

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ stellt nun die Tangente des Winkels dar, den die Verbindungslinie der Punkte x_1y_1 und x_2y_2 mit der x-Axe bildet. Ist derselbe φ, so folgt

$$3)\quad x = p + x_1 + y_2 \cot\varphi,$$

also

$$y = \frac{y_1(x_1 + p) - xy_1}{p} = \frac{x_1y_1 + py_1 - py_1 - x_1y_1 - y_1y_2\cot\varphi}{p},$$

oder

$$y = -\frac{y_1y_2}{p}\cot\varphi.$$

Ist $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, so erhalten wir die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$4)\quad \xi = p + x_1 + y_1 \cot\varphi,$$
$$\eta = -\frac{y_1^2}{p}\cot\varphi,$$

oder da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{y_1}$ ist,

$$5)\quad \xi = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p} = p + 3x_1,$$
$$\eta = -\frac{y_1^3}{p^2},$$

also

$$\varrho^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2$$
$$= (p + 2x_1)^2 + y_1^2\left(1 + \frac{y_1^2}{p^2}\right)^2$$
$$= (p + 2x_1)^2 + y_1^2\left(1 + \frac{2x_1}{p}\right)^2 = (p + 2x_1)^2\left\{1 + \frac{y_1^2}{p^2}\right\}$$
$$= \frac{(p + 2x_1)^3}{p^2} = \frac{(y_1^2 + p^2)^3}{p^4}, \text{ also}$$
$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Bezeichnen wir aber die Normale mit N, so ergiebt sich

$$6)\quad \varrho = \frac{N^3}{p^2}, \text{ denn } N^2 = y_1^2 + p^2.$$

Setzen wir nun in der Gleichung der Normalen $x = -\frac{p}{2}$, so erhalten wir den Punkt, in welchem dieselbe die Leitlinie schneidet. Dies giebt

$$y = \frac{y_1(x_1 + p) + \frac{p}{2}y_1}{p} = \frac{y_1}{2p^2}\{y_1^2 + 3p^2\}$$

also

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2p^2}(y_1^2 + p^2),$$
$$x_1 + \frac{p}{2} = \frac{y_1^2 + p^2}{2p},$$

bezeichnen wir also die Länge vom Fuſspunkte der Normale bis zur Leitlinie mit σ, so ist

$$\sigma^2 = (y - y_1)^2 + \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{(y_1{}^2 + p^2)^3}{4p^4},$$

$$\sigma = \frac{(y_1{}^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}, \text{ also } \sigma = \frac{\varrho}{2},$$

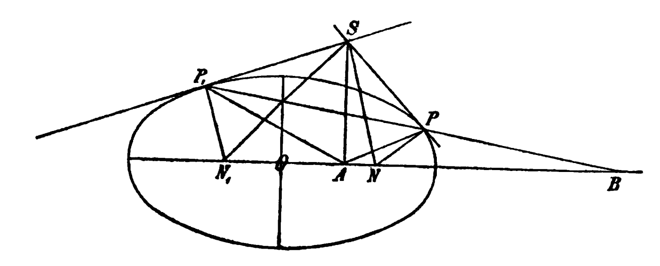
d. h.: Wenn man die Normale bis zur Leitlinie verlängert, so ist das Stück von der Kurve bis zur Leitlinie gleich dem halben Krümmungshalbmesser.

Bem. Dieser Satz ergiebt sich auch als Zusatz zu dem Satze von No. 153, da der Ortskreis der rechtwinkligen Tangenten bei der Parabel in die Leitlinie übergeht.

155. Satz. Zieht man von einem Punkte S 2 Tangenten SP und SP_1 an einen Kegelschnitt und sind ϱ und ϱ_1 die zugehörigen Krümmungshalbmesser von P und P_1, so gilt die Gleichung

$$\frac{SP^3}{SP_1{}^3} = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Fig. 25.



Bew. Zieht man (Fig. 25) in P und P_1 die Normalen PN und P_1N_1, so ist

$$1) \quad \frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{PN^3}{P_1N_1{}^3} \text{ (No. 152)},$$

also ist zu beweisen

$$2) \quad \frac{SP}{SP_1} = \frac{PN}{P_1N_1}.$$

Man fälle nun das Lot SA auf die Hauptaxe und bestimme den Schnittpunkt B der x-Axe mit PP_1. Da PP_1 die Polare von S ist, so geht die Polare von B durch S, also da die Polaren

eines Punktes der Hauptaxe zu derselben senkrecht sind, so ist SA die Polare von B. Schneidet nun SA die Gerade PP_1 in B_1, so sind PP_1 und BB_1 4 harmonische Punkte, also die Strahlen $A\,(PP_1\,BB_1)$ ein harmonisches Strahlenbüschel, und da SA zu AB senkrecht ist, so wird $A\,(P_1P)$ durch AS halbiert. Nun liegen $NPSA$ sowohl, als N_1ASP_1 auf einem Kreise; also ist $N\,(SP) = A\,(SP) = A\,(P_1S)] = N_1\,(P_1S)$, also sind die Dreiecke NPS und N_1P_1S ähnlich, und

$$\frac{NP}{SF} = \frac{N_1P_1}{SP_1}.$$

156. Beziehungen zwischen der excentrischen Anomalie, der wahren Breite und der wahren Anomalie bei der Ellipse.

Die Bezeichnung sei wie früher, ein Punkt der Ellipse P (Fig. 26). Der Winkel, den PF mit der x-Axe bildet, heifst die wahre Anomalie und werde mit φ bezeichnet; der Winkel β, den die Normale mit der x-Axe bildet, heifst die wahre Breite. Fällt man dann das Lot PQ auf die x-Axe, bestimmt den Schnittpunkt P' dieses Lotes mit dem Kreise, dessen Durchmesser die grofse Axe ist, und verbindet P' mit O, so ist der Winkel ω, den diese Linie mit der x-Axe bildet, die excentrische Anomalie.

Fig. 26.

Aus der Gleichung der Normale leitet man leicht ab

$$1)\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}.$$

Ferner ist $P'Q = \frac{a}{b}\,y_1$, $OQ = x_1$, also

$$2)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{a y_1}{b x_1},\quad \text{hienach}$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\omega.$$

Ferner

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1}{x_1 - e}.$$

Da aber $P'Q = \frac{a}{b} y_1 = a \sin \omega$, $OQ = x_1 = a \cos \omega$, so ist

$$4)\quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \omega}{a \cos \omega - e},$$

also

$$\sin \varphi = \frac{b \sin \omega}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega + (a \cos \omega - e)^2}};$$

ferner $a^2 \cos^2 \omega - 2ae \cos \omega + e^2 + b^2 \sin^2 \omega = (a^2 - b^2) \cos^2 \omega - 2ae \cos \omega + e^2 + b^2 = a^2 - 2ae \cos \omega + e^2 \cos^2 \omega = (a - e \cos \omega)^2$,

also

$$5)\quad \sin \varphi = \frac{b \sin \omega}{a - e \cos \omega},$$

und

$$6)\quad \cos \varphi = \frac{a \cos \omega - e}{a - e \cos \omega}.$$

Hieraus folgt

$$7)\quad \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{(a + e)(1 - \cos \omega)}{(a - e)(1 + \cos \omega)},$$

also

$$8)\quad \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{a + e}{a - e} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}.$$

Leicht folgt aus (6) noch

$$9)\quad \cos \omega = \frac{e + a \cos \varphi}{a + e \cos \varphi}.$$

Aus (5) folgt:

$$b \sin \omega = \sin \varphi \, (a - e \cos \omega)$$
$$= \sin \varphi \left\{ a - \frac{e^2 + ae \cos \varphi}{a + e \cos \varphi} \right\} = \frac{b^2 \sin \varphi}{a + e \cos \varphi},$$

also

$$10)\quad \sin \omega = \frac{b \sin \varphi}{a + e \cos \varphi},$$

also mit Hülfe von (9)

$$11)\quad \operatorname{tg} \omega = \frac{b \sin \varphi}{e + a \cos \varphi},$$

und

$$12)\quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \varphi}{e + a \cos \varphi}.$$

157. Ein Kegelschnitt wird durch 5 Punkte bestimmt; durch 4 Punkte wird man daher unendlich viele Kegelschnitte legen können. Betrachtet man umgekehrt 2 Kegelschnitte:

$$1)\ u = ax^2 + by^2 + c + 2a_1y + 2b_1x + 2c_1xy = 0,$$
$$2)\ v = dx^2 + ey^2 + f + 2d_1y + 2e_1x + 2f_1xy = 0,$$

so werden dieselben im allgemeinen 4 Punkte gemein haben; denn kombinieren wir die beiden Gleichungen, so werden wir für x und y 4 Wurzeln erhalten. Von denselben können aber 2 oder alle 4 imaginär sein, d. h. die Kegelschnitte können auch 2 oder keinen Punkt miteinander gemein haben. Betrachten wir nun die Gleichung:

$$3)\ u - \lambda v = 0,$$

so wird dieselbe einen Kegelschnitt darstellen, und zwar einen solchen, der durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte (1) und (2) geht, da die Gleichung für $u = 0$ und $v = 0$ erfüllt wird. Eine besondere Art eines Kegelschnitts ist die, dafs er aus 2 Geraden besteht. Stellen wir uns also die Frage, kann $u - \lambda v = 0$ 2 Gerade vorstellen. Nach No. 129 geschieht dies, wenn folgende Gleichung besteht:

$$4)\ \begin{vmatrix} a - \lambda d, & c_1 - \lambda f_1, & b_1 - \lambda e_1 \\ c_1 - \lambda f_1, & b - \lambda e, & a_1 - \lambda d_1 \\ b_1 - \lambda e_1, & a_1 - \lambda d_1, & c - \lambda f \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung 3ten Grades für λ, die folglich 3 Wurzeln hat. Wir können also sagen, es giebt im allgemeinen 3 Werte von λ, für welche $u - \lambda v = 0$ ein Linienpaar vorstellt. Dies stimmt auch mit der Anschauung überein, nach der 4 Punkte auf 3 Arten durch je 2 Linien verbunden werden können. Die Punkte $ABCD$ bestimmen folgende Linienpaare:

(a) AB und CD, (b) AC und BD, (c) AD und BC.

Die Gleichung (4) enthält nun bei reellen Koeffizienten von u und v mindestens eine reelle Wurzel, also erhalten wir mindestens ein reelles Linienpaar. Nehmen wir aber an, dafs die Kegelschnitte sich in 2 Punkten schneiden, so haben wir nur eine Gerade, welche durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte geht, und haben wir keine Schnittpunkte der Kegelschnitte, so auch keine Gerade, welche durch deren Schnittpunkte geht; trotzdem aber erhalten wir 2 Gerade, die wir als durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte gehend ansehen müssen. Wie bei 2 Kreisen, die sich nicht schneiden, die Chordale als

eine Gerade angesehen werden mufs, welche durch die Schnittpunkte jener Kreise geht, so wird das ähnlich bei 2 Kegelschnitten sein, die sich nicht schneiden. Wir werden immer 2 Gerade erhalten, die gewisse Eigenschaften haben, welche den gemeinschaftlichen Sekanten von Kegelschnitten zukommen, so dafs jene Geraden als ideelle gemeinsame Sekanten der Kegelschnitte anzusehen sind.

158. Die Gleichung eines Kegelschnitts sei in der Hauptform gegeben, und sei kurz mit $u = 0$ bezeichnet; wir wollen dabei nur bemerken, dafs kein Glied mit xy vorkommt. Die Gleichung eines Kreises sei $S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$; dabei wollen wir annehmen, dafs der Kreis den Kegelschnitt in 4 reellen Punkten schneidet. Betrachtet man also die Gleichung $u - \lambda\ S = 0$, so giebt es 3 Werte von λ, welche diese Gleichung zu der eines Linienpaares machen. Denken wir einen solchen Wert eingesetzt, so kann also gesetzt werden:

$$1) \qquad u - \lambda\ S \mp (ax + b\,y + c)\ (a_1 x + b_1 y + c_1).$$

Das in xy multiplizierte Glied rechts heifst $(a_1 b + a b_1)\, xy$; da links kein solches Glied vorkommt, so ist

$$2) \qquad a_1 b + a b_1 = 0, \text{ also}$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1},$$

d. h. der Winkel, den die eine Gerade mit der x-Axe bildet, ist entgegengesetzt dem Winkel, den die andere Gerade bildet, oder die Halbierungslinie des Winkels der Geraden ist der x-Axe parallel, ebenso die Halbierungslinie des Nebenwinkels der y-Axe. Dies giebt den Satz:

Wenn ein Kreis einen Kegelschnitt schneidet, und man zieht 2 gemeinschaftliche Sehnen, so sind die Halbierungslinien der Winkel derselben den Axen des Kegelschnitts parallel.

Bem. Da 4 reelle Schnittpunkte vorhanden sein sollen, so giebt es 3 Werte von λ. Die Schlufsfolge läfst sich an jedem der Schnittpunkte machen. Da wir nun einen beliebigen Kreis mit einem beliebigen Kegelschnitt kombinieren können, so folgt:

Zieht man die 3 Linienpaare, welche 4 Punkte eines Kreises verbinden, und halbiert die Winkel an den Schnittpunkten, so müssen dieselben parallel resp. senkrecht zu einander sein.

159. Es seien $U = 0$, $V = 0$, $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ die Gleichungen von 4 Geraden, dann ist

$$1)\quad UV + \lambda U_1 V_1 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die Punkte geht, in welchen das erste Linienpaar das andere schneidet. Dies ist unmittelbar ersichtlich, da die Gleichung erfüllt wird durch die Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 2)\quad U &= 0 \text{ und } U_1 = 0, \\ U &= 0 \quad „ \quad V_1 = 0, \\ V &= 0 \quad „ \quad U_1 = 0, \\ V &= 0 \quad „ \quad V_1 = 0. \end{aligned}$$

Durch Veränderung von λ erhält man alle möglichen Kegelschnitte durch diese Punkte.

160. Pascalscher Satz.

Man habe 6 Punkte $A_1\, A_3\, A_3\, A_4\, A_5\, A_6$ auf einem Kegelschnitt (Taf. II, Fig. 8). Es sei ferner:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0 \text{ die Gleichung von } A_1 A_2, \\ U_2 &= 0 \quad „ \quad „ \quad „ \quad A_2 A_3, \\ &\dots\dots\dots \\ U_6 &= 0 \quad „ \quad „ \quad „ \quad A_6 A_1, \\ \text{und } W_1 &= 0 \quad „ \quad „ \quad „ \quad A_1 A_4. \end{aligned}$$

Da der Kegelschnitt durch die Punkte $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, die Schnittpunkte von U_1 und U_3 mit U_2 und W_1, geht, so ist dessen Gleichung von der Form

$$1)\quad U_1 U_3 - \lambda U_2 W_1 = 0.$$

Ebenso hat sie die Form

$$2)\quad U_4 U_6 - \lambda_1 U_5 W_1 = 0,$$

hieraus folgt $\quad U_1 U_3 - \lambda U_2 W_1 \equiv k\,(U_4 U_6 - \lambda_1 U_5 W_1)$,

oder also

$$3)\quad U_1 U_3 - k U_4 U_6 \equiv W_1 (\lambda U_2 - k \lambda_1 U_5).$$

Nun bedeutet

$$4)\quad U_1 U_3 - k U_4 U_6 = 0$$

einen Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte von U_1 und U_3 mit U_4 und U_6 geht, d. h. durch $Q S A_1 A_4$, wo die Bedeutung von Q und S ersichtlich ist. Die Gleichung (3) sagt uns aber, daſs der Kegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt; die eine Gerade ist W_1, d. h. die Gerade $A_1 A_4$, also muſs die zweite Gerade die Verbindungslinie von Q und S sein, die Form $\lambda U_2 - k\lambda_1 U_5 = 0$

sagt aber, dafs sie durch den Schnittpunkt R von U_2 und U_5 geht, also liegen die Schnittpunkte von U_1 mit U_4, U_2 mit U_5, U_3 mit U_6 in einer Geraden. Wir haben damit den Pascalschen Satz vom Hexagramma mysticum bewiesen: In jedem Sechseck, das einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, schneiden sich die Gegenseiten in drei Punkten, die in einer Geraden liegen.

161. Der Satz von Brianchon.

Dem eben angeführten Satze steht ein anderer gegenüber, welcher als der polare desselben bezeichnet wird, und mit Hülfe der Sätze von Pol und Polare bewiesen werden kann. Wir ziehen in den Punkten $A_1 A_2 \ldots A_6$ (Taf. II, Fig. 8) die Tangenten, deren Schnittpunkte resp. seien: $P_1 P_2 \ldots P_6$, sodafs P_1 der Pol von U_1, P_2 der Pol von $U_2 \ldots$, P_6 der Pol von U_6 ist. Da Q auf der Polare von P_1 und von P_4 liegt, so ist Q der Pol von $P_1 P_4$, ebenso ist dann R der Pol von $P_2 P_5$, und S der Pol von $P_4 P_6$. Da nun QRS in einer Geraden liegen, so müssen sich die Polaren in einem Punkte schneiden, d. h. also:

In jedem Sechseck, das einem Kegelschnitt umschrieben ist, schneiden sich die Hauptdiagonalen in einem Punkte.

162. Folgerungen. Diese Sätze erlauben die weitgehendsten Folgerungen, von denen nur einige hier erwähnt werden sollen. Zunächst kann man die Reihenfolge der Ecken, sowie der Tangenten ändern, und erhält dadurch viele andere Tripel von Punkten in einer Geraden, oder, indem wir diese Geraden als Pascalsche Linien bezeichnen, viele Pascalsche Linien. Es läfst sich leicht berechnen, dafs es 60 sind; ebenso erhält man beim Sechseck um den Kegelschnitt 60 Punkte des Brianchon.

Wir finden ferner bestätigt, dafs 5 Punkte sowie 5 Tangenten einen Kegelschnitt bestimmen, denn der 6[te] Punkt sowie die 6[te] Tangente mufs schon eine besondere Lage haben. Es ist leicht, mittels des Pascalschen Satzes den 2[ten] Schnittpunkt einer Geraden mit dem Kegelchnitt zu erhalten, wenn diese durch einen der gegebenen Punkte geht, ebenso die 2[te] Tangente von einem Punkte auf einer Tangente, wenn 5 Punkte oder 5 Tangenten gegeben sind.

Wenn man ferner 2 Punkte z. B. A_6 und A_1 zusammenfallen läfst, so geht die Linie $A_1 A_6$ in die Tangente in diesem Punkte über, die sich sonach leicht konstruieren läfst. Wie uns nun der Pascalsche Satz erlaubt, von 5 Punkten eines Kegelschnitts die Tangenten zu konstruieren, so giebt uns der Satz des Brianchon die Berührungspunkte von 5 Tangenten.

gegenüber,
d mit Hülfe
. Wir ziehen
genten, deren
der Pol von $\mathfrak{B}_1$,
Da Q auf der
Pol von P_1P_4,
er Pol von P_4P_5.
ssen sich die Po-

itt umschrieben ist,
n Punkte.

uben die weitgehend-
ier erwähnt werden
e der Ecken, sowie
viele andere Tripel
wir diese Geraden
scalsche Linien. Es
ebenso erhält man
kte des Brianchon.
unkte sowie 5 Tan-
der 6te Punkt sowie
e Lage haben. Es
en 2ten Schnittpunkt
alten, wenn diese
nso die 2te Tangente
nn 5 Punkte oder

und A_1 zusammen-
Tangente in diesem
ren läfst. Wie uns
kten eines Kegel-
giebt uns der Satz
Tangenten.

Es ergeben sich weitere F
paare, und schliefslich 3 Punkt
sei nur der Satz erwähnt: Bes
Kegelschnitt, so gehen die Ver
Berührungspunkten auf den Geg
der polare Satz: Beschreibt m
schnitt und bestimmt die Schn
Ecken mit den Gegenseiten, s
Geraden.

163. Betrachten wir zwe
Mittelpunkt und dieselbe Richt
Centralvektoren in gleicher Ri
so werden wir die Kegelschn
nennen. Es ist klar, dafs d

wird, wenn das Verhältnis der

schieben wir den einen Keg
selbe Richtung behalten, so
Man wird leicht einsehen, d
Punkt finden kann, von dem d
den Punkten der Lage nach zus
ein konstantes Verhältnis be
Axen konstant, die Richtung
die Kegelschnitte immer ähnlic
so sind dieselben immer ähnli
den Brennpunkt aufeinander le
hältnis haben. Für diese erh

$$r = \frac{}{1 -}$$

so dafs bei gleicher Richtung
Parameter sind.

Da für den Asymptotenwi
gilt

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

so sind alle Hyperbeln ähnlic
winkel haben.

164. Besonders interessante Beziehungen bestehen noch zwischen Kegelschnitten, welche dieselben Brennpunkte haben, die wir dann als konfokal (einige Schriftsteller sagen bikonfokal) bezeichnen wollen. Wir wollen erst solche mit einem Mittelpunkte betrachten. Die Gleichungen seien:

$$1)\quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0,$$

$$2)\quad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - 1 = 0,$$

so dafs $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ etc. die Halbaxen bedeuten. Ist nun

$$3)\quad \sqrt{A-B} = \sqrt{A_1 - B_1}, \text{ oder also auch } A - B = A_1 - B_1,$$

so fallen die Brennpunkte zusammen. Für die Koordinaten der Schnittpunkte erhält man:

$$4)\quad x^2 = \frac{AA_1(B_1 - B)}{AB_1 - A_1 B},$$

$$y^2 = \frac{BB_1(A - A_1)}{AB_1 - A_1 B}.$$

Ist nun $A > A_1$, so ist auch $B > B_1$; A und A_1 müssen wir uns als positiv denken. Dann können x^2 und y^2 nur positiv sein, wenn B_1 negativ ist; dagegen mufs B positiv sein. Wir erhalten daher nur dann reelle Schnittpunkte, wenn die eine Kurve eine Ellipse, die andere eine Hyperbel ist. Wir setzen also:

$$5)\quad A = a^2,\; A_1 = a_0^2,\; B = b^2,\; B_1 = -b_0^2,$$

$$a^2 - b^2 = a_0^2 + b_0^2 = e^2.$$

Es wird dann

$$6)\quad x^2 = \frac{a^2 a_0^2 (b^2 + b_0^2)}{a^2 b_0^2 + a_0^2 b^2},\quad y^2 = \frac{b^2 b_0^2 (a^2 - a_0^2)}{a^2 b_0^2 + a_0^2 b^2},$$

aber $a^2 b_0^2 + a_0^2 b^2 = (e^2 + b^2) b_0^2 + (e^2 - b_0^2) b^2 = e^2 (b^2 + b_0^2)$ $= (a^2 - a_0^2) e^2$, also $x^2 = \frac{a^2 a_0^2}{e^2}$, $y^2 = \frac{b^2 b_0^2}{e^2}$, oder

$$3)\quad x = \pm \frac{a a_0}{e},\quad y = \pm \frac{b b_0}{e}.$$

Die Gleichungen der Tangenten in einem Schnittpunkte werden also

$$8)\quad \frac{x a_0}{a e} + \frac{y b_0}{b e} - 1 = 0,$$

$$\frac{x a}{a_0 e} - \frac{y b}{b_0 e} - 1 = 0,$$

woraus folgt, dafs dieselben auf einander senkrecht stehen. Wir erhalten also den Satz:

Wenn sich zwei konfokale Kegelschnitte schneiden, so schneiden sie sich rechtwinklig.

165. Sind Parabeln gegeben, so werden wir sie als konfokal ansehen, wenn ihre Brennpunkte und Axen zusammenfallen; der 2[te] Brennpunkt ist gleichmäfsig als in der Unendlichkeit liegend anzusehen. Die Gleichungen derselben sind:

$$1) \quad y^2 - 2px + p^2 = 0,$$
$$y^2 - 2qx + q^2 = 0,$$

bezogen auf ein Koordinatensystem mit dem Brennpunkte als Anfangspunkt. Für die Schnittpunkte ergiebt sich:

$$x = \frac{p+q}{2},$$
$$y^2 = -pq.$$

Reelle Schnittpunkte sind also nur vorhanden, wenn p und q verschiedene Zeichen haben, d. h. wenn sich die Parabeln nach entgegengesetzten Seiten öffnen. Bildet man die Gleichungen der Tangenten an den Schnittpunkten, so ergiebt sich auch hier leicht, dafs sie auf einander senkrecht stehen.

166. Satz. Der Ort, beschrieben von dem Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel 2 konfokale Ellipsen berühren, ist ein Kreis.

Bew. Die Gleichungen der Ellipsen seien:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0,$$

die Gleichungen von 2 aufeinander senkrechten Tangenten:

$$2) \quad y = mx + \sqrt{b^2 + a^2m^2},$$
$$y = -\frac{x}{m} + \sqrt{B^2 + \frac{A^2}{m^2}}.$$

Hieraus ist m zu eliminieren mit der Bedingung, dafs die Kurven konfokal sind, also

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2, \text{ oder } A^2 + b^2 = a^2 + B^2 \text{ ist.}$$

Aus den Gleichungen (2) folgt:

$$3)\quad y^2 + m^2x^2 - 2ymx = b^2 + a^2m^2,$$
$$m^2y^2 + x^2 + 2ymx = A^2 + B^2m^2,$$

hieraus durch Addition

$$4)\quad (y^2 + x^2)(1+m^2) = (A^2 + b^2)(1+m^2),$$

oder
$$x^2 + y^2 = A^2 + b^2 = a^2 + B^2.$$

Bem. Für die Hyperbel gilt das entsprechende, doch erhält man einen reellen Kreis nur, wenn

$A^2 - b^2$ positiv ist.

167. Satz. Wenn sich 2 konfokale Kegelschnitte schneiden, so ist der Abstand des Schnittpunktes von einem Brennpunkte gleich der Summe oder Differenz der entsprechenden Halbaxen.

Bew. Wir bezeichnen die Axen mit $2a$, $2b$; resp. $2a_0$ und $2b_0$. Für die Koordinaten eines Schnittpunktes ergiebt sich

$$1)\quad x_1 = \frac{aa_0}{e},\quad y_1 = \frac{bb_0}{e},$$

für die Distanzen von den Brennpunkten somit

$$d^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2,\quad d_1^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2,$$

$$d^2 = \frac{(aa_0 + e^2)^2 + b^2b_0^2}{e^2} = \frac{a^2a_0^2 + 2aa_0e^2 + e^4 + b^2b_0^2}{e^2}$$

$$= \frac{(b^2+e^2)(e^2-b_0^2)+2aa_0e^2+e^4+b^2b_0^2}{e^2} = 2e^2+(b^2-b_0^2)+2aa_0,$$

also

$$2)\quad d^2 = e^2 + b^2 + e^2 - b_0^2 + 2aa_0 = a^2 + a_0^2 + 2aa_0$$
$$d^2 = (a + a_0)^2,\quad \text{also } d = a + a_0.$$

Ebenso sehr leicht

$$d_1^2 = a^2 + a_0^2 - 2aa_0 = (a - a_0)^2.$$

168. Es seien jetzt 4 konfokale Kurven gegeben, 2 Ellipsen und 2 Hyperbeln; in jedem Ebenenteile, gebildet von den Axen, werden 4 Schnittpunkte liegen, von denen wir die im positiven Teile betrachten wollen. Die Schnittpunkte auf der einen Ellipse liegend seien P und Q, auf der andern P_1 und Q_1, so dafs P und P_1 auf der einen, Q und Q_1 auf der andern Hyperbel liegen. Die Axen der Ellipsen seien a, b und A, B, die der Hyperbeln a_0, b_0 und A_0, B_0; es soll bewiesen werden, dafs die Gleichung besteht: $P_1Q = PQ_1$.

Es seien zu dem Ende

$\xi_0\,\eta_0$ die Koordinaten von P,

$x_0\,y_0$ „ „ Q,

$\xi_1\,\eta_1$ „ „ P_1,

$x_1\,y_1$ „ „ Q_1.

Ist $PQ_1 = d$ und $P_1Q = d_1$, so ergiebt sich zunächst (Fig. 27)

Fig. 27.

$$d^2 = (\xi_0 - x_1)^2 + (\eta_0 - y_1)^2,$$

$$d_1^2 = (\xi_1 - x_0)^2 + (\eta_1 - y_0)^2.$$

Nun ist

$$\xi_0 = \frac{aa_0}{e}, \quad \eta_0 = \frac{bb_0}{e}$$

$$x_1 = \frac{AA_0}{e}, \quad y_1 = \frac{BB_0}{e},$$



also

$$2\,\xi_0 x_1 = \frac{2aa_0\,AA_0}{e^2}, \quad 2\,\eta_0 y_1 = \frac{2\,bb_0\,BB_0}{e^2},$$

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = \frac{a^2a_0^2 + b^2b_0^2}{e^2} = \frac{a^2a_0^2 + (a^2 - e^2)(e^2 - a_0^2)}{e^2}$$

$$= a^2 + a_0^2 - e^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{A^2A_0^2 + B^2B_0^2}{e^2} = A^2 + A_0^2 - e^2,$$

also $d^2 = a^2 + a_0^2 + A^2 + A_0^2 - 2e^2 - \dfrac{2\,(aa_0\,AA_0 + bb_0\,BB_0)}{e^2}$.

Bei P_1Q ist a mit A_0 und A mit a_0 zu kombinieren, analog die Gröſsen $b\,B_0$ etc., der Ausdruck für d_1^2 bleibt hienach ganz derselbe als d^2, da er die Axen ganz symmetrisch enthält, daher ist

$$d^2 = d_1^2.$$

Anhang.

Entwickelung der Hülfssätze von den Determinanten.

1. Hat man die Gleichung $a_1 x + a_2 = 0$, so wird durch dieselbe die Gröfse x bestimmt, nämlich

$$x = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Setzen wir in der Gleichung $x = \frac{x_1}{x_2}$ und multiplizieren mit x_2, so giebt dies

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0.$$

Wir nennen diese Gleichung, die in jedem Gliede eine Unbekannte als Faktor enthält eine homogene Gleichung des ersten Grades. Aus ihr kann man nur das Verhältnis der Unbekannten bestimmen.

Bem. Ebenso ist eine homogene Gleichung von höherem Grade als eine solche anzusehen, durch welche nur das Verhältnis der Unbekannten bestimmt wird; es sollen hier nur die Gleichungen des ersten Grades in Betracht kommen.

2. Hat man eine Gleichung des ersten Grades mit mehreren Unbekannten, so kommt dieselbe auf eine homogene zurück, aber mit einer Unbekannten mehr. Es werden hienach n homogene Gleichungen mit $n + 1$ Unbekannten das Verhältnis derselben bestimmen. Hat man z. B. die Gleichungen

$$1) \quad \begin{aligned} a_1 x + a_2 y &= -a_3, \\ b_1 x + b_2 y &= -b_3, \end{aligned}$$

so erhält man durch Einführung von

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

und Multiplikation mit x_3:

$$2) \quad \begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen läfst sich $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ oder $x_1 : x_2 : x_3$ bestimmen.

3. Hat man 2 homogene Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0,$$

so werden diese Gleichungen für $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ erfüllt. Schliefsen wir diese Werte aus, so wird eine Bedingung zwischen den Koeffizienten erfüllt werden müssen, wenn beide Gleichungen zugleich bestehen sollen. Man erhält nämlich aus diesen Gleichungen:

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{b_2}{b_1}.$$

Es mufs also sein:

$$-\frac{a_2}{a_1} = -\frac{b_2}{b_1} \text{ oder } (1) \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Dieser Ausdruck (1), der gleich Null gesetzt, die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen angiebt, heifst die Determinante der beiden Gleichungen oder auch die Determinante der Koeffizienten, die in den beiden Gleichungen stehen, insofern wir die Determinante aus den Koeffizienten bilden können, ohne auf die Gleichungen zurückzugehen. Dafür ist nun folgende Bezeichnung gewählt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Weil hier nur 2 Reihen vorkommen, heifst die Determinante eine solche der 2ten Ordnung.

4. Wir wollen nun folgendes System von Gleichungen lösen:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden mit resp. α_1 und α_2 multipliziert und addiert, dies giebt

$$(2) \quad (a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2) x_1 + (a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2) x_2 + (a_3 \alpha_1 + b_3 \alpha_2) x_3 = 0.$$

Setzen wir hier

$$(3) \quad a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 = 0,$$

so giebt dies

$$(4) \quad \frac{x_1}{x_3} = -\frac{a_3 \alpha_1 + b_3 \alpha_2}{a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2}.$$

Denken wir uns die Gleichungen resp. mit β_1 und β_2 multipliziert, welche die Bedingung erfüllen

$$(5)\quad a_1\beta_1 + b_1\beta_2 = 0,$$

so giebt dies

$$(6)\quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_3\beta_1 + b_3\beta_2}{a_2\beta_1 + b_2\beta_2}.$$

Die Gleichungen (3) und (5) bestimmen nur das Verhältnis der α und β, daher können wir eine Gröfse willkürlich annehmen und setzen:

$$(7)\quad \alpha_1 = -b_2, \quad \alpha_2 = a_2,$$
$$\beta_1 = -b_1, \quad \beta_2 = a_1.$$

Dann folgt:

$$(8)\quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$
$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

oder (9) $x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}.$

Es ergiebt sich also folgendes Resultat:

Wenn man 2 homogene Gleichungen mit 3 Unbekannten hat, so ist das Verhältnis der Unbekannten gleich dem Verhältnis der Determinanten, die man erhält, wenn man die Koeffizientenreihe der betreffenden Unbekannten fortläfst, dabei aber die cyklische Reihenfolge festhält, so dafs 2 hinter 1, 3 hinter 2 und 1 hinter 3 steht.

5. Hat man nun 3 homogene Gleichungen mit 3 Unbekannten, so sieht man sofort ein, dafs eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten bestehen mufs, wenn man die Werte 0 für die Unbekannten ausschliefst.

Die Gleichungen seien:

$$1)\quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0,$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0.$$

Multiplizieren wir mit resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und addieren, so erhalten wir

$$2)\quad (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3)\,x_1 + (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3)\,x_2 + (a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3)\,x_3 = 0.$$

Setzt man hier:

$$3)\quad a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 = 0,$$
$$a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0,$$

so bestimmt man dadurch $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, nämlich

$$4)\quad \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 a_2 \\ c_3 a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix}.$$

Sind aber die Gleichungen (3) erfüllt, so auch die Gleichung

$$5)\quad a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 + c_1 \alpha_3 = 0.$$

Die Werte von α_1, α_2, α_3 aus (4) hier eingesetzt, erhalten wir

$$6)\quad a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 a_2 \\ c_3 a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 = 0.$$

Wir bezeichnen dies kürzer mit

$$7)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$ und nennen die linke Seite eine Determinante der 3ten Ordnung.

6. Vertauscht man in dieser Determinante

a_2 mit b_1,
a_3 mit c_1,
b_3 mit c_2,

so bleibt sie ungeändert. Wir wollen aber noch einen Beweis angeben, der sich sofort auf Determinanten höherer Ordnung übertragen läſst. Jene Vertauschung besagt nichts anderes, als daſs die Vertikalreihen mit den Horizontalreihen vertauscht sind. Sollen die Gleichungen (1) in No. 5 erfüllt werden können, so erhalten wir die Bedingung, indem wir den Ausdruck (7) gleich Null setzen. Es ist nun gezeigt, daſs die Gleichungen (3) in No. 5 die Gleichung (5) nach sich ziehen, also das System:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 + c_1 \alpha_3 &= 0, \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + c_2 \alpha_3 &= 0, \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die Koeffizienten der Horizontalreihen die der Vertikalreihen von (1) in No. 5. Da nun das eine System das andere nach sich zieht, so muſs auch die Bedingung dieselbe sein. Bilden wir aber die ersten Glieder von diesen Determinanten, so stimmen sie ganz überein, also müssen sie vollständig übereinstimmen, d. h. es kann diese 2[te] Determinante nicht noch einen besonderen Faktor enthalten.

7. In der Gleichung (6) in No. 5 ist die Determinante nach den Koeffizienten der ersten Vertikalreihe geordnet; aus der Natur der Entstehung folgt, daſs eine beliebige andere Reihe gewählt werden kann, und zwar nach dem vorigen Satze auch eine Horizontalreihe.

Ferner ändert sich das Zeichen einer Determinante der 2ten Ordnung, wenn man die Glieder einer Reihe mit den entsprechenden einer andern vertauscht. Aus der vorher angegebenen Darstellung folgt dies auch für Determinanten der 3ten Ordnung. Es wird nicht schwer sein, diesen Satz noch weiter auszudehnen. Hieraus wird man sofort den Satz einsehen: Sind zwei Reihen einer Determinante gleich, so ist sie Null.

8. Aus der Entwicklung der Determinante nach den Gliedern einer Reihe folgt, daſs, wenn alle Glieder einer Reihe einen Faktor haben, die ganze Determinante ihn hat, und daſs man diesen Faktor auch herausziehen kann, wobei dann die Glieder der Reihe ohne diesen Faktor genommen werden.

9. Es mögen nun die Glieder einer Reihe aus je zwei Gliedern bestehen, z. B.

$$a_1 = \alpha_1 + \beta_1, \quad a_2 = \alpha_2 + \beta_2, \quad a_3 = \alpha_3 + \beta_3.$$

Die Determinante nach den a geordnet und diese Werte substituiert giebt, wenn die Determinante mit $\triangle$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}\triangle = \alpha_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} \\ + \beta_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + \beta_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

oder also

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dieser Satz läſst sich leicht ausdehnen auf den Fall, daſs man noch mehr Glieder in einer oder mehreren Reihen hat.

10. Satz. Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu jedem Gliede einer Reihe ein beliebiges Vielfache des entsprechenden Gliedes einer andern Reihe addiert.

Es soll bewiesen werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nach dem vorigen Satze ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 & a_3 + \lambda b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

die letzte Determinante ist aber Null, da sie zwei gleiche Reihen hat.

Bem. Selbstverständlich kann man auch zu den Gliedern der Reihe noch Vielfache der Glieder 3ten Reihe addieren.

11. Aufg. Es sollen drei homogene Gleichungen mit vier Unbekannten aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 1)\quad & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \\ & b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0, \\ & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichungen mit den unbestimmten Faktoren α_1, α_2, α_3 resp. multiplizieren und addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2)\quad & (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_3\alpha_3)\, x_1 + (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_3\alpha_3)\, x_2 \\ & + (a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3)\, x_3 + (a_4\alpha_1 + b_4\alpha_2 + c_4\alpha_3)\, x_4 = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$3)\quad \begin{aligned} & a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 = 0, \\ & a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$4)\quad \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$5)\quad (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3)\, x_1 + (a_4\alpha_1 + b_4\alpha_2 + c_4\alpha_3)\, x_4 = 0.$$

Setzt man nun für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Werte aus (4) hier hinein und führt die Determinantenbezeichnungen ein, also

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 a_2 \\ c_3 a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix},$$

so folgt

$$6)\quad x_1 : x_4 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 a_4 \\ b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Durch Vertauschung der Indices, erhalten wir:

$$x_2 : x_4 = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_4 \\ b_1 b_3 b_4 \\ c_1 c_3 c_4 \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 a_4 a_1 \\ b_3 b_4 b_1 \\ c_3 c_4 c_1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix},$$

$$x_3 : x_4 = \begin{vmatrix} a_2 a_1 a_4 \\ b_2 b_1 b_4 \\ c_2 c_1 c_4 \end{vmatrix} : + \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 a_1 a_2 \\ b_4 b_1 b_2 \\ c_4 c_1 c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix},$$

und somit

$$7)\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{vmatrix} a_2 a_3 a_4 \\ b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_3 a_4 a_1 \\ b_3 b_4 b_1 \\ c_3 c_4 c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_4 a_1 a_2 \\ b_4 b_1 b_2 \\ c_4 c_1 c_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

Der Satz in No. 4 ist dadurch auf Determinanten der 3ten Ordnung erweitert: Wenn man 3 homogene Gleichungen mit 4 Unbekannten hat, so ist das Verhältnis der Unbekannten gleich dem Verhältnis der Determinanten, mit abwechselndem Zeichen genommen, die man erhält, wenn man die Koeffizienten der betreffenden Unbekannten fortläſst, dabei aber die cyclische Reihenfolge festhält.

12. Sind nun 4 homogene Gleichungen mit 4 Unbekannten gegeben:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= 0, \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= 0, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 &= 0, \end{aligned}$$

so wird eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten bestehen, die wir darstellen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \\ c_1 c_2 c_3 c_4 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt giebt dies, wie leicht nachzuweisen ist,

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \\ d_2 d_3 d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} c_2 c_3 c_4 \\ d_2 d_3 d_4 \\ a_2 a_3 a_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 d_3 d_4 \\ a_2 a_3 a_4 \\ b_2 b_3 b_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 a_3 a_4 \\ b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \end{vmatrix}$$

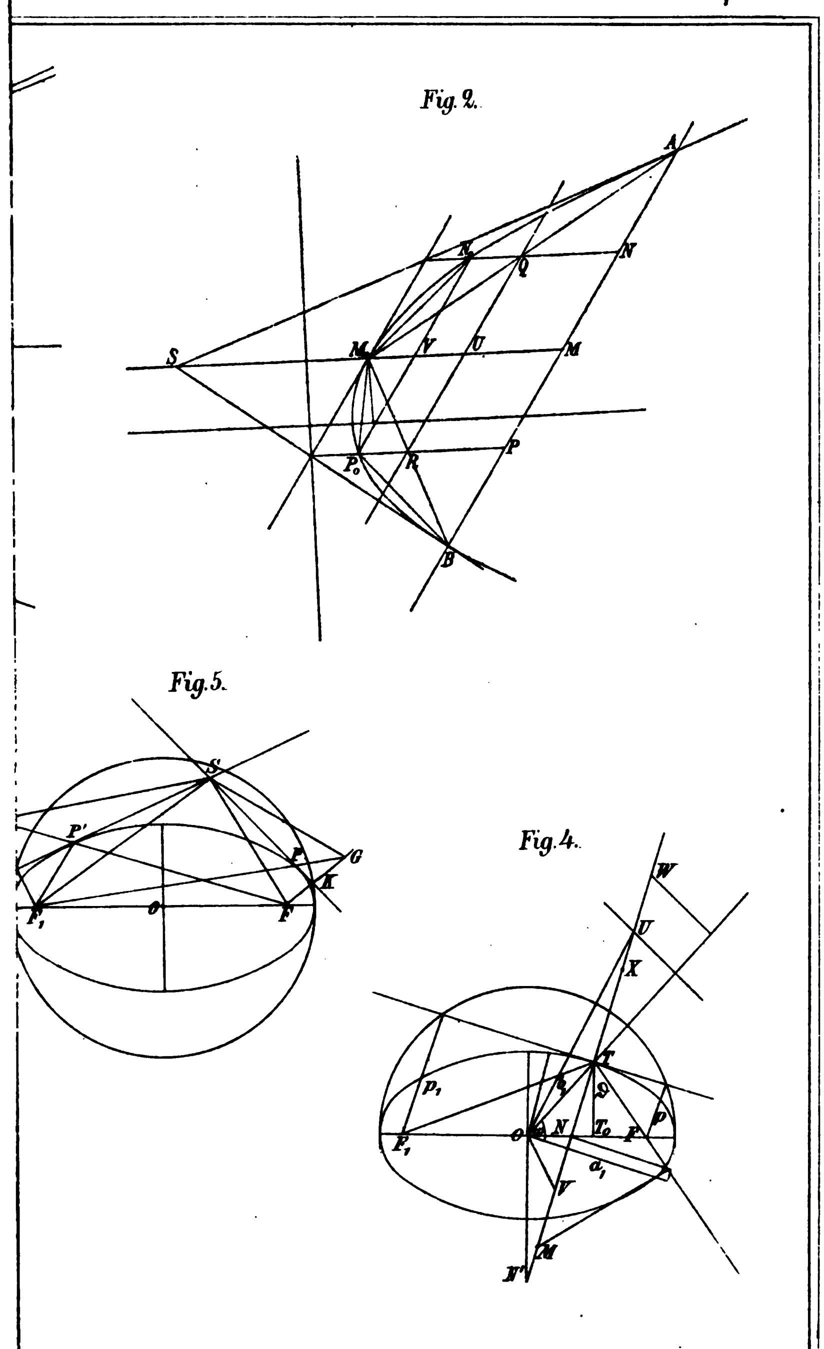
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \\ d_2 d_3 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_3 b_4 b_1 \\ c_3 c_4 c_1 \\ d_3 d_4 d_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_4 b_1 b_2 \\ c_4 c_1 c_2 \\ d_4 d_1 d_2 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \\ d_1 d_2 d_3 \end{vmatrix}.$$

Daſs für diese Determinanten die Sätze (6) (7) (8) (9) (10) der Determinanten 3ter Ordnung gelten, ist hieraus sofort einzusehen.

Eine Ausdehnung der Determinantensätze auf solche von höherer Ordnung ist leicht, aber für unsere Zwecke nicht nötig.

Druck von W. Pormetter in Berlin, C., Neue Grünstr. 30.

Tafel I.



Tafel II.

Fig. 7.

Fig. 8.



